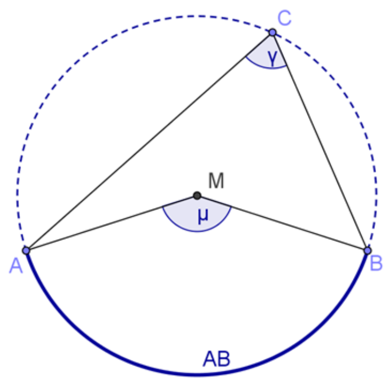
Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Dr. Hermann Vogel

Peripheriewinkelsatz (Umfangswinkelsatz)

Zunächst wird ein Kreis mit festem Mittelpunkt M und festem Radius r gezeichnet. Auf der Kreislinie werden zwei Punkte A, B fixiert (rechte Maustaste – Eigenschaften – Objekt fixieren) und die zugehörigen Kreisbögen AB (durchgehende Linie) und BA (gestrichelt) eingetragen (die Kreislinie selbst sollte dann unsichtbar gemacht werden – z.B. rechte Maustaste – Objekt anzeigen).



Ein Punkt C wird auf den Bogen BA gesetzt und der Umfangswinkel <)ACB (Bezeichnung γ) gemessen.

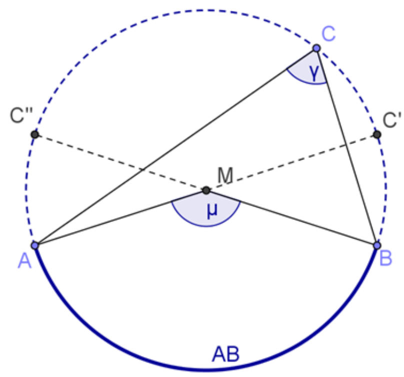
Bewegt man C auf dem Bogen BA, so zeigt sich, dass die Größe des Winkels unverändert bleibt.

Schließlich vergleicht man γ mit dem Mittelpunktswinkel <)AMB (Bezeichnung μ) und erhält folgende Vermutung:

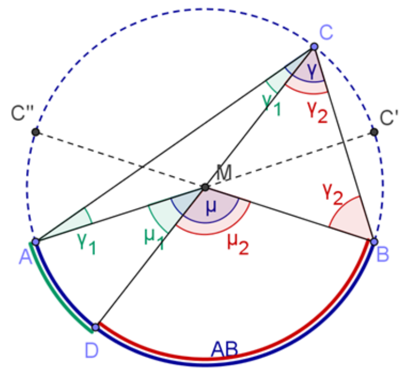
Der Mittelpunktswinkel μ (zum Kreisbogen AB) ist doppelt so groß wie der (bzw. die) Umfangswinkel γ (über dem Bogen AB).

Der **Beweis** kann **in** folgenden **zwei Schritten** erfolgen:

Im ersten Schritt erkennt man, dass die Aussage in **zwei Spezialfällen** zutrifft und zwar, wenn C=C' bzw. C=C'', d.h., wenn M auf einem Schenkel von γ liegt. Betrachte Außenwinkelsatz im gleichschenkligen Dreieck MBC' bzw. AMC'' mit μ als Außenwinkel.



Im zweiten Schritt wird der **allgemeine Fall** durch Eintrag des Durchmessers MC **auf obige Spezialfälle reduziert**, d.h. im vorliegenden Fall der Bogen AB in zwei Teilbögen AD und DB zerlegt über denen die Aussage gültig ist.



Durch **Kombination der beiden speziellen Aussagen** erhält man die gewünschte Aussage für den Fall, dass C auf dem Bogen C'C'' liegt, als Summe der Teilwinkel.

In den Fällen, dass C auf den Bögen BC' oder C''A liegen, sind die Differenzen der Teilwinkel zu nehmen.

D.h. der Beweis erfordert eine **Fallunterscheidung**, die auch in den Figuren berücksichtigt werden muss.

Dazu muss man bei **GeoGebra** z.B. den Bogen AD abhängig von der Lage von C z.B. wie folgt definieren:

AD = Wenn[y(C) > y(C'), Kreisbogen[M, A'', D''], Wenn[x(C) > 0, Kreisbogen[M, D'', A''], Kreisbogen[M, A'', D'']]]

Dabei ist hier M=(0,0) gesetzt und A'' und D'' sind die um 0.1 nach außen versetzten Punkte A bzw. D. Die zugehörigen Texte werden über Eigenschaften -> Erweitert unter den entsprechenden Bedingungen angezeigt oder ausgeblendet, vgl. Peripheriewinkelsatz.ggb.

Bei **Cinderella** wird der Farbsaum über CindyScript bereits so erzeugt, dass diese Fallunterscheidung nicht eigens zu berücksichtigen ist, vgl. Peripheriewinkelsatz.cdy.

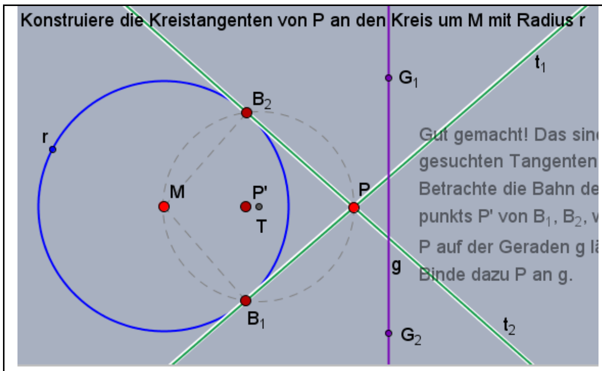
Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Dr. Hermann Vogel

Konstruktion der Kreistangenten

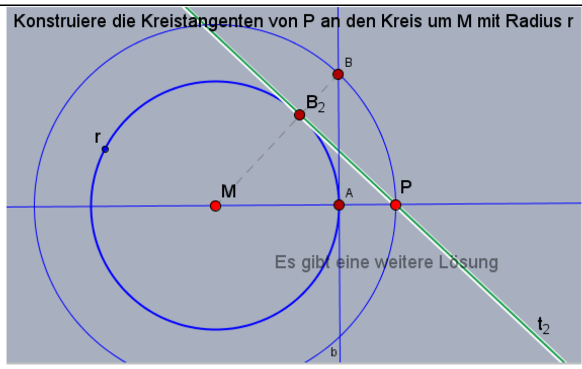
Da Cinderella stets die Inzidenzen der neu konstruierten Objekte mit den vorhandenen überprüft (Automatischer Beweiser), werden gleiche Objekte identifiziert, d.h. nur einmal als Objekt in die Objektliste übernommen. Dies ermöglicht Aufgabenstellungen, bei denen der Lösungsweg unterstützt und die Korrektheit der Ergebnisse überprüft wird.

Dazu erstellt man zunächst die Lösung der Aufgabe, macht anschließend alle erforderlichen Konstruktionsobjekte unsichtbar (bis auf die nötigen Objekte der Aufgabenstellung) und speichert die Figur dann ab, vgl. **Kreistangenten-Aufgabe.cdy**.

Öffnet man diese Figur und beginnt mit der Konstruktion, so werden die neukonstruierten Objekte mit den Versteckten verglichen. Bei Übereinstimmung erscheinen dann die Objekte automatisch mit der Bezeichnung und dem Layout der versteckten Objekte. Das gilt auch bei einer alternativen Konstruktion, womit die Korrektheit dieses Weges überprüft wird.



Lösungsweg der versteckt wurde



Alternativer Lösungsweg nach Euklid

Wie findet man beim Lösungsweg nach Euklid die zweite Lösung?

Über CindyScript kann man mit
if(Objekt.visible, ... , ...)
vorbereitete Informationen (Texte) einblenden, z.B. mit Text2 dass es eine weitere Lösung gibt, oder auch eine zusätzliche Fragestellung mit weiteren Objekten Text1.
Die Texte und die zusätzlichen Objekte werden beim Start der Aufgabe ausgeblendet, siehe **Scripting -> Initialisierung:**
Text1.visible=false;
Text2.visible=false;
apply([P',G1,G2,g],#.visible=false);
	Scripting -> Zeichnen:
	if(t1.visible & t2.visible,
	Text1.visible=true;
	Text2.visible=false;
	apply([P',G1,G2,g],#.visible=true)
	,
	if(t1.visible % t2.visible,
	Text2.visible=true
	,
	Text2.visible=false
	);
	);

Die zusätzliche Fragestellung führt auf die **Kreisinversion**, die „Geraden und Kreise“ auf „Geraden und Kreise“ abbildet. Dass das Bild der Geraden g ein Kreis durch M ist, lässt sich elementargeometrisch mit Hilfe von Ähnlichkeiten und dem Satz von Thales begründen.

Bei **GeoGebra** könnte man die versteckte Figur (oder nur die Lösungsobjekte) über eine Schaltfläche einblenden und mit den selbst konstruierten Objekten vergleichen lassen, vgl. **Kreistangenten-Aufgabe.ggb**. Die **Korrektheit der Eukildschen Lösung wird** allerdings in der Version GeoGebra 5.0.82.0 **noch nicht erkannt**. Probier es aus. Problematisch sind zudem Umbenennungen, die nicht in GeoGebra-Skript übernommen werden, weswegen die Lösungsobjekte mit „L“ versehen wurden, siehe **Kreistangenten-Lsg.ggb**.