4 Ein wenig analytische Geometrie

4.1 Geraden und Ebenen im $P^n, n = 2, 3$

4.1.1 Geraden in homogenen Koordinaten

(a) Geraden im P^n in Parameterform

$P(\vec{p})$, $Q(\vec{q})$ Punkte des P^n, $n = 2$, 3

homog. Koord. $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^{n+1}$ bis auf einen Faktor $\neq 0$ bestimmt.

$P \neq Q \;\Leftrightarrow\; \vec{p}$, $\vec{q}$ linear unabhängig (**l.u.**).

Parameterdarstellung von $g := PQ$

$g : \vec{x} = u \cdot \vec{p} + v \cdot \vec{q}$ mit $u, v \in \mathbb{R}$, $(u, v) \neq (0, 0)$

homog. Koord. von $X(\vec{x}) \in g$ mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ bis auf einen Faktor $\neq 0$ bestimmt. Warum $(u, v) \neq (0, 0)$?

Parameter $u = 0$ liefert Q.
Parameter $v = 0$ liefert P.

Division durch u und $\frac{v}{u} =: v'$:

$$\vec{x} = \vec{p} + v' \cdot \vec{q} \quad \text{mit } v' \in \mathbb{R}$$

liefert $g \setminus \{Q\}$.

Division durch v liefert $g \setminus \{P\}$.

Ist Q ein Fernpunkt und P eigentlich, so sind $q_0 = 0$ und o.E. $p_0 = 1$ und die Division durch u liefert die bekannte Parameterdarstellung in affinen Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + v' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, \; v' \in \mathbb{R}$$

mit Aufpunkt und Vielfachem eines Richtungsvektors. Streiche die oberste Zeile.

Sind P und Q eigentliche Punkte, so kann man o.E. $q_0 = p_0 = 1$ wählen und es gilt: $R(\vec{r})$ mit $\vec{r} = \vec{q} - \vec{p}$ ist Fernpunkt der Geraden $g = PQ = PR$.

Sind P und Q Fernpunkte, so ist $g = PQ$ eine (im P^2 **die**) Ferngerade.

Beispiel in der projektiv erweiterten euklidischen Ebene P^2, vgl. Figur-4-1-1-a.

In P^2 erhält man wie folgt eine Koordinatengleichung der Geraden $g = PQ$:

$X(\vec{x}) \in g \Leftrightarrow \vec{x} = u\vec{p} + v\vec{q}$ (homog. Koord. von X)

$\Leftrightarrow \vec{x},\ \vec{p},\ \vec{q}$ sind in $\mathbb{R}^3$ **linear abhängig**

$\Leftrightarrow \det(\vec{x},\vec{p},\vec{q}) = 0 \overset{(DE)}{\Leftrightarrow} (\vec{p} \times \vec{q})^T\,\vec{x} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{n}^{\,T}\vec{x} = 0$ mit $\vec{n} := \vec{p} \times \vec{q} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{o}\}$

$\Leftrightarrow g:\ n_0x_0 + n_1x_1 + n_2x_2 = 0 \quad (*)$.

Für (DE) siehe Figur-4-1-1-b Einschub Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$,

vgl. Determinantenentwicklung nach 1.Spalte.

(*) ist die Gleichung von $g \subset P^2$ in homog. Koordinaten.

$\vec{n} := \vec{p} \times \vec{q} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{o}\}$ sind die homogenen Geradenkoordinaten von $g = PQ$.

$(*)$: x_0 liefert mit $x = \frac{x_1}{x_0},\ y = \frac{x_2}{x_0}$

$\Leftrightarrow g:\ n_0 + n_1x + n_2y = 0$.

die Gleichung von $g\,(\neq$ FG: $x_0 = 0)$ in affinen Koordinaten.

Umgekehrt erhält man die homogenen Punktkoordinaten des Schnittpunkts $S(\vec{s})$ zweier Geraden $\begin{matrix} g_a : \vec{a}^{\,T}\vec{x} = 0 \\ g_b : \vec{b}^{\,T}\vec{x} = 0 \end{matrix}$ als $\vec{s} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Beachte: $g_a \neq g_b \ \Leftrightarrow\ \vec{a},\ \vec{b}$ linear unabhängig $\Leftrightarrow\ \vec{s} = \vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{o}$.

Vorteil homogener Koordinaten in der projektiven Ebene P^2: Berechnung von Verbindungsgeraden zweier Punkte oder Schnittpunkten zweier Geraden (unter Einbeziehung von Fernpunkten) einfach mit Hilfe des Vektorprodukts, vgl.
Figur-4-1-1-c

(b) Geraden im P^2 in Koordinatendarstellung (zweiter Zugang im P^2)

Bekannte Gleichung einer Geraden g in $\mathbb{E}^2$ in affinen Koordinaten:

$g: \ a_0 + a_1 x + a_2 y = 0 \qquad (a_1, a_2) \neq (0,0)$

Übergang zu homogenen Koordinaten mit Transformation: $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$ liefert

$$g: \ a_0 + a_1 \frac{x_1}{x_0} + a_2 \frac{x_2}{x_0} = 0 \qquad | \cdot x_0$$

$$g: \ a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \qquad (*)$$

die Gleichung (*) der Geraden g in P^2 in homogenen Koordinaten.

Die **homogenen Geradenkoordinaten** $\vec{a} = (a_0, a_1, a_2)^T \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{o}\}$ sind nur bis auf einen Faktor $\neq 0$ bestimmt.

Für $(a_1, a_2) = (0,0)$ und $a_0 \neq 0$ liefert (*) die Ferngerade $x_0 = 0$.
(In affinen Koordinaten ausgeschlossen)

Für eigentliche Geraden ist
$(a_1, a_2) \neq (0,0)$ und es gilt:
$(0, a_2, -a_1)$ ist Fernpunkt der Gerade.

Beachte: $(a_0, a_1, a_2) \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} = a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0$

Vgl. Figur-4-1-1-d-projektiveEbene

Beobachtung: (*) ist symmetrisch in $\vec{a}$ und $\vec{x}$.

Für festes $\left\{ \begin{array}{c} \vec{a} \\ \vec{x} \end{array} \right\}$ ist (*) die Gleichung für die Menge der $\left\{ \begin{array}{c} \text{Punkte auf einer Geraden} \\ \text{Geraden durch einen Punkt} \end{array} \right\}$.

$\left\{ \begin{array}{c} \vec{a} \\ \vec{x} \end{array} \right\}$ ist homogener Koordinatenvektor $\left\{ \begin{array}{l} \text{einer Geraden} \\ \text{eines Punktes} \end{array} \right\}$.

Damit hat man zwei bijektive Abbildungen:

Punkte eines P^2
$\leftrightarrow$ homogene Koordinatenvektoren im $\mathbb{R}^3$
$\leftrightarrow$ Geraden eines P^2

Die Menge der Geraden einer projektiv abgeschlossenen euklidischen Ebene P^2 bildet selbst eine projektiv abgeschlossene euklidische Ebene, die zu P^2 **duale Ebene** $\widehat{P}^2$.

(Der Ferngeraden $1 \cdot x_0 + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$ entspricht dabei der Koordinatenursprung $(1, 0, 0)$ eines kartesischen KS.)

Figur-4-1-1-e-DualitätsprinzipEbene

Sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ homogene Koordinatenvektoren zweier Geraden. Dann ist $\begin{array}{l} g_a : \ \vec{a}^T \vec{x} = 0 \\ g_b : \ \vec{b}^T \vec{x} = 0 \end{array}$ ein lineares Gleichungssystem (**LGS**) für deren Schnittpunkt $X(\vec{x})$ mit $\vec{x} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Sind $\vec{x}$, $\vec{y}$ homogene Koordinatenvektoren zweier Punkte. Dann ist $\begin{array}{l} g_a : \ \vec{a}^T \vec{x} = 0 \\ g_a : \ \vec{a}^T \vec{y} = 0 \end{array}$ ein LGS für deren Vebindungsgerade $g(\vec{a})$ mit $\vec{a} = \vec{x} \times \vec{y}$.

Dualitätsprinzip der ebenen projektiven Geometrie:

Ist A eine allgemeingültige Aussage in P^2, in der Punkte, Geraden, Verbinden von Punkten, Schneiden von Geraden und keine weiteren Operationen vorkommen, so erhält man aus A eine dazu duale Aussage $\hat{A}$, inden man ersetzt:

A	$\hat{A}$
Punkt P	Gerade p
Gerade q	Punkt Q
verbinden	schneiden
$g = PQ$	$G = p \cap q$
schneiden	verbinden

$\hat{A}$ gilt genau dann, wenn A gilt, muss also nicht eigens bewiesen zu werden.

Beispiel: Definition der harmonischen Lage von vier Geraden durch einen Punkt:

Erinnerung:
Geg.: ebenes Vierseit $PQRS$ mit den Seiten $p := PQ$, $q := QR$, $r := RS$, $s := SP$
Schnittpunkte der Gegenseiten
$p \cap r =: A$, $q \cap s =: B$
Schnittpunkte C, D von $g := AB$ mit den Diagonalen $e := PR$ und $f := QS$; also
$C := AB \cap PR$, $D := AB \cap QS$
Dann heißen die vier Punkte A, B, C, D auf g (in dieser Reihenfolge) **in harmonischer Lage**.

Figur-4-1-1-f-dualeHarmonischeLage

Dual dazu:

Geg.: ebenes Viereck $pqrs$ mit den Ecken $P := p \cap q$, $Q := q \cap r$, $R := r \cap s$, $S := s \cap p$

Verbindungsgeraden der Gegenecken

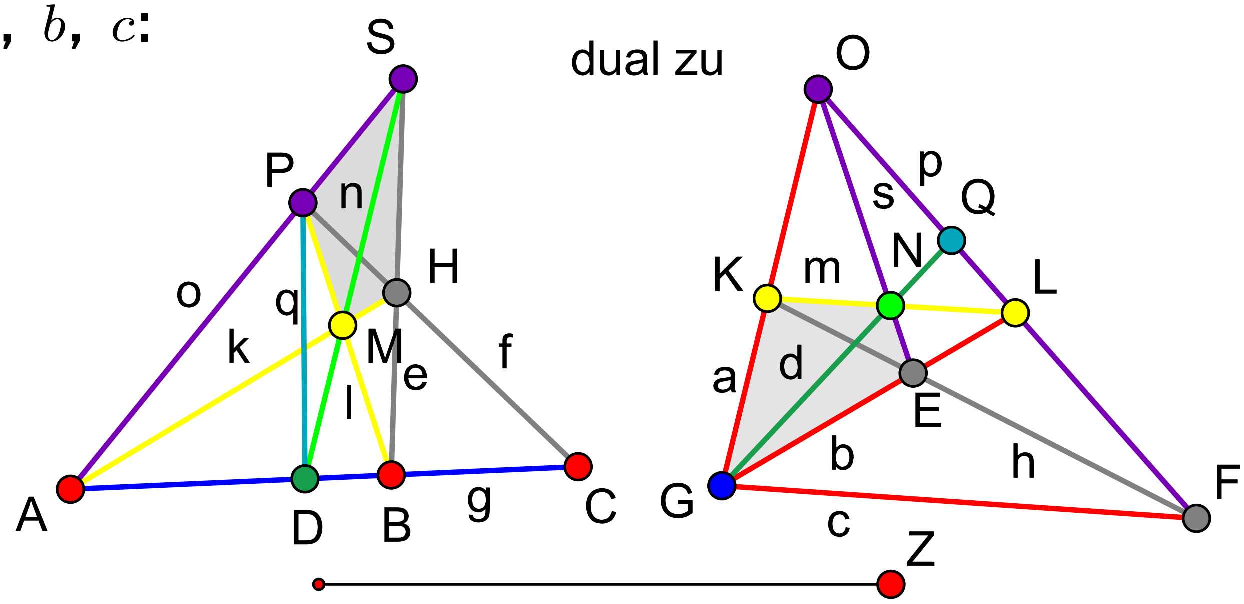
$PR =: a$, $QS =: b$

Verbindungsgeraden c, d von $G := a \cap b$ mit den Schnittpunkten der Gegenseiten $E := p \cap r$ bzw. $F := q \cap s$; also

$c := (a \cap b)(p \cap r), d := (a \cap b)(q \cap s)$

Dann heißen die vier Geraden a, b, c, d durch G (in dieser Reihenfolge) **in harmonischer Lage**.

Konstruktion der vierten harmonischen Geraden d zu drei gegebenen Geraden a, b, c:



Diese (alte) Figur wurde mit Cinderella erstellt.

Figur-4-1-1-g-duale Konstruktion Harmonische Lage

4.1.2 Ebenen im projekiven Raum P^3

(a) Parameterform einer Ebene in homogenen Koordinaten:

Eine Ebene ε wird aufgespannt durch drei **nicht kollineare** Punkte $P(\vec{p})$, $Q(\vec{q})$, $R(\vec{r})$.

homog. Koord. $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \in \mathbb{R}^4$ bis auf einen Faktor $\neq 0$ bestimmt.

Die Punkte P, Q, R sind **kollinear**, wenn sie auf einer gemeinsamen Geraden liegen $\Leftrightarrow \vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ sind linear abhängig (**l.a.**).

Sind $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ linear unabhängig, dann ist eine **Parameterdarstellung von** $\varepsilon = PQR$

$$\varepsilon : \vec{x} = u\vec{p} + v\vec{q} + w\vec{r}, \quad u, v, w \in \mathbb{R},$$
$$\text{Parameter } (u, v, w) \neq (0, 0, 0).$$

homog. Koord. von $X(\vec{x}) \in \varepsilon$ mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ bis auf einen Faktor $\neq 0$ bestimmt. Warum $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$?

Parameter $u = 0$ liefert die Gerade $QR \subset \varepsilon$.

Division durch u und $\frac{v}{u} =: v'$, $\frac{w}{u} =: w'$:

$$\vec{x} = \vec{p} + v'\vec{q} + w'\vec{r}, \quad v', w' \in \mathbb{R}$$

liefert $\varepsilon \setminus QR$.

Sind $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ fest gewählt, so sind $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$ homog. Koord. von $X(\vec{x})$ in ε, (v', w') "affine Koordinaten" in $\varepsilon \setminus QR$.

Ist P ein eigentlicher Punkt, und sind Q, R Fernpunkte, so sind $q_0 = r_0 = 0$ und o.E. $p_0 = 1$ und die Division durch u liefert:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + v' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} + w' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix},$$

also (bis auf die erste Zeile) die bekannte Parameterdarstellung einer Ebene im $\mathbb{R}^3$.

Im P^3 erhält man wie folgt eine Koordinatendarstellung der Ebene $\varepsilon = PQR$:

$X(\vec{x}) \in \varepsilon \Leftrightarrow \vec{x} = u\vec{p} + v\vec{q} + w\vec{r}$ (hom. Ko. von X)

$\Leftrightarrow \vec{x},\ \vec{p},\ \vec{q}, \vec{r}$ sind in $\mathbb{R}^4$ **linear abhängig**

$\Leftrightarrow \det(\vec{x}, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) = 0$

$\Rightarrow \varepsilon :\ x_0 \cdot n_0 + x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 = 0.$

Determinantenentwicklung nach 1.Spalte (Streichen der 1.Spalte und der i.Zeile) $n_i := (-1)^i \cdot \det \begin{pmatrix} p_0 & q_0 & r_0 \\ . & . & . \\ \cancel{p_i} & \cancel{q_i} & \cancel{r_i} \\ . & . & . \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix}$.

$\Leftrightarrow \varepsilon : \vec{n}^{\,T}\vec{x} = 0$ mit $\vec{n} \in \mathbb{R}^4 \backslash \{\vec{o}\}$.

$\vec{n}$ sind die homogenen Ebenenkoordinaten von $\varepsilon \subset P^3$.

(b) Koordinatendarstellung einer Ebene im P^3:

Bekannte Gleichung einer Ebene ε in $\mathbb{E}^3$ in affinen Koordinaten:

$\varepsilon:\ a_0+a_1x+a_2y+a_3z=0,\ (a_1,a_2,a_3)\neq(0,0,0).$

Übergang zu homogenen Koordinaten mit Transformation: $x=\frac{x_1}{x_0},\ y=\frac{x_2}{x_0},\ z=\frac{x_3}{x_0}$ liefert

$\varepsilon:\ a_0+a_1\cdot\frac{x_1}{x_0}+a_2\cdot\frac{x_2}{x_0}+a_3\cdot\frac{x_3}{x_0}=0 \quad |\cdot x_0$

$\varepsilon:\ a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 \qquad (*)$

die Gleichung (*) einer Ebene ε in P^3 in homogenen Koordinaten.

Die **homogenen Ebenenkoordinaten** $\vec{a}=(a_0,a_1,a_2,a_3)^T\in\mathbb{R}^4\backslash\{\vec{o}\}$ sind nur bis auf einen Faktor $\neq 0$ bestimmt.

Für $(a_1,a_2,a_3)=(0,0,0)$ und $a_0\neq 0$ liefert (*) die Fernebene des P^3.

(*) **und** $x_0=0$: Ferngerade von ε

Beobachtung: (*) ist symmetrisch in $\vec{a}$ und $\vec{x}$.

Für festes $\left\{ \begin{array}{c} \vec{a} \\ \vec{x} \end{array} \right\}$ ist (*) die Gleichung für die Menge aller $\left\{ \begin{array}{c} \text{Punkte in einer Ebene} \\ \text{Ebenen durch einen Punkt} \end{array} \right\}$.

$\left\{ \begin{array}{c} \vec{x} \\ \vec{a} \end{array} \right\}$ ist homogener Koordinatenvektor $\left\{ \begin{array}{c} \text{eines Punktes} \\ \text{einer Ebene} \end{array} \right\}$.

Bijektive Beziehungen:

Punkte eines P^3
$\leftrightarrow$ homogene Koordinatenvektoren im $\mathbb{R}^4$
$\leftrightarrow$ Ebenen eines P^3

Die Menge der Ebenen eines dreidimensionalen projektiv abgeschlossenen euklidischen Raumes P^3 bildet selbst einen dreidimensionalen projektiv abgeschlossenen euklidischen Raum, den zu P^3 **dualen Raum** $\widehat{P}^3$.

Siehe: Figur-4-1-2-DualitätsprinzipRaum

Nebenrechnung zu Figur-4-1-2-DualitätsprinzipRaum:

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ sind so gewählt, dass $\begin{array}{ll} \vec{a}^T\vec{d} = 0, & \vec{a}^T\vec{e} = 0 \\ \vec{b}^T\vec{d} = 0, & \vec{b}^T\vec{e} = 0 \end{array}$, d.h.

die Punkte D, E in ε_a und in ε_b liegen $\Rightarrow \varepsilon_a \cap \varepsilon_b = h = DE$,

die Punkte A, B in ε_d und in ε_e liegen $\Rightarrow \varepsilon_d \cap \varepsilon_e = g = AB$.

$C(\vec{c}) \in g \Leftrightarrow \vec{c} = u\vec{a} + v\vec{b},\ u, v \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \vec{c}^T\vec{d} = u\vec{a}^T\vec{d} + v\vec{b}^T\vec{d} = 0 \\ \vec{c}^T\vec{e} = u\vec{a}^T\vec{e} + v\vec{b}^T\vec{e} = 0 \end{array}$

d.h. die Punkte D, E und damit $h = DE$ liegen in ε_c.

Umgekehrt liegt C in ε_d und in ε_e, also auf $g = \varepsilon_d \cap \varepsilon_e$.

Analog zeigt man $F \in h \ \Rightarrow\ A, B$ und $g = AB$ liegen in ε_f.

Sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ homogene Koordinatenvektoren zweier Ebenen. Dann ist $\begin{array}{l} \varepsilon_a:\ \vec{a}^T\vec{x} = 0 \\ \varepsilon_b:\ \vec{b}^T\vec{x} = 0 \end{array}$ ein **LGS** für die Punkte $X(\vec{x})$ deren Schnittgerade $g = \varepsilon_a \cap \varepsilon_b$.

Sind $\vec{x}$, $\vec{y}$ homogene Koordinatenvektoren zweier Punkte. Dann ist $\begin{array}{l} \varepsilon_a:\ \vec{a}^T\vec{x} = 0 \\ \varepsilon_a:\ \vec{a}^T\vec{y} = 0 \end{array}$ ein **LGS** für alle Ebenen ε_a durch deren Vebindungsgerade $g = XY$.

Dualitätsprinzip der räumlichen projektiven Geometrie:

Ist A eine allgemeingültige Aussage in P^3, in der Punkte und Ebenen (und Geraden) sowie Verbinden und Schneiden und keine weiteren Operationen vorkommen, so erhält man aus A eine dazu duale Aussage $\widehat{A}$, inden man ersetzt:

A	$\hat{A}$
Punkt	Ebene
Gerade	Gerade
Ebene	Punkt
verbinden von Punkten	schneiden von Ebenen
schneiden von Ebenen	verbinden von Punkten

$\hat{A}$ muss nicht eigens bewiesen werden.