2 Ein wenig projektive Geometrie

2.1 Fernpunkte

2.1.1 Projektive Einführung von Fernpunkten

Wir gehen aus von der euklidischen Zeichenebene und betrachten
Figur-2-1-1 Fernpunkte

Parallele Geraden schneiden einander (in der euklidischen Ebene) nicht.

Vereinbarung: Wir nehmen zu jeder Geraden **einen Fernpunkt** dazu
(ein zusätzliches Element, das nicht zur euklidischen Ebene gehört!)
so dass gilt:

Zwei verschiedene Geraden g, h haben denselben Fernpunkt
$:\Longleftrightarrow g \parallel h$ (pA)

Damit (und mit den folgenden Vereinbarungen) wird die euklidische Ebene abgeschlossen zur **projektiv erweiterten** oder **projektiv abgeschlossenen euklidischen Ebene**.

Wir vereinbaren:
Die Fernpunkte der Ebene (in jeder Richtung einer) bilden die **Ferngerade** der Ebene.

Die Punkte, die nicht Fernpunkte sind, heißen **eigentliche Punkte**.

Jede Gerade, die nicht Ferngerade ist, heißt **eigentliche Gerade**.

In der projektiv abgeschlossenen euklidischen Ebene gilt:

Je zwei nichtparallele eigentliche Geraden schneiden einander in einem eigentlichen Punkt.

Je zwei parallele eigentliche Geraden schneiden einander in einem Fernpunkt.

Jede eigentliche Gerade schneidet **die Ferngerade** in einem Fernpunkt.

Insgesamt gilt:

Satz: Je zwei Geraden in der projektiv abgeschlossenen euklidischen Ebene schneiden einander in einem Punkt.

Treffen wir im euklidischen Anschauungsraum obige **Vereinbarung**, wird der euklidische Raum abgeschlossen zum **projektiv erweiterten** oder **projektiv abgeschlossenen euklidischen Raum**.

Dabei vereinbaren wir:
Die Fernpunkte des Raumes (in jeder Richtung einer) bilden die **Fernebene (FE)**.

Die Punkte, die nicht Fernpunkte sind, heißen **eigentliche Punkte**.

Jede Ebene, die nicht Fernebene ist, heißt **eigentliche Ebene**.

Die Fernpunkte jeder eigentlichen Ebene bilden die **Ferngerade** $\subset$ **FE** dieser Ebene.

(Damit gilt: Jede eigentliche Ebene schneidet die Fernebene in einer Geraden.)

Jede Gerade ($\not\subset$ **FE**), die nicht Ferngerade ist, heißt **eigentliche Gerade**.

Es gilt: Parallele eigentliche Ebenen haben dieselbe Ferngerade.
Warum?

(Damit gilt: Parallele eigentliche Ebenen schneiden einander in einer Geraden.)

(Es gilt auch: Nichtparallele eigentliche Ebenen schneiden einander in einer Geraden.)

Insgesamt gilt:

Satz: Je zwei (verschiedene) Ebenen im projektiv abgeschlossenen euklidischen Raum schneiden einander in einer Geraden.

Es gilt auch

Satz: Im projektiv abgeschlossenen euklidischen Raum schneidet jede Gerade g jede Ebene ε, die g nicht enthält, in genau einem Punkt S. Dabei gilt:
S ist Fernpunkt $\Longleftrightarrow g \parallel \varepsilon$.

Beweis: Fallunterscheidung:
1) g, ε beide eigentlich,
a) $g \nparallel \varepsilon \Rightarrow \exists\, \{S\} = g \cap \varepsilon$ (euklidisch klar)
b) $g \parallel \varepsilon \Rightarrow \exists\, h \subset \varepsilon$ mit $h \parallel g \Rightarrow$
Fernpunkt S von h und g liegt auf Ferngerade von $\varepsilon \Rightarrow g \cap \varepsilon = \{S\}$.

2) g eigentlich und ε Fernebene $\Rightarrow$
Fernpunkt S von g liegt in ε $\Rightarrow$ $\{S\} = g \cap \varepsilon$.
3) $g \subset$ Fernebene und ε eigentlich $\Rightarrow$
g ist Ferngerade einer eigentlichen Ebene $\delta \not\parallel \varepsilon$ $\Rightarrow \delta \cap \varepsilon = h$ ist eine eigentliche Gerade mit Fernpunkt $\{S\} = g \cap h = g \cap \varepsilon$.
($\delta \parallel \varepsilon \Rightarrow$ beide Ebenen haben dieselbe Ferngerade g $\Rightarrow$
$g \subset \varepsilon$ $\Rightarrow$ Widerspruch zur Voraus..)
Mit der Ferngerade f von ε gilt: $\{S\} = g \cap f$. In 2.1.2 zeigen wir, dass sich in der Fernebene zwei verschiedene Ferngeraden in einem (Fern-)Punkt schneiden.

Warum das Ganze?

Sätze im projektiv abgeschlossenen Raum sind einfacher und kürzer zu formulieren als im euklidischen Raum.

Es gibt weniger Ausnahmen (z.B. wegen Parallelitäten).

Nach ersten grundlegenden Beweisen werden Beweise dadurch einfacher.
(Weniger Fallunterscheidungen)

Am Ende des Beweises muss man gegebenenfalls das Ergebnis euklidisch interpretieren.

2.1.2 Einfache Aussagen über den projektiv abgeschlossenen euklidischen Raum

Satz: Zwei verschiedene Geraden g, h haben einen Schnittpunkt $S \Longleftrightarrow g$ und h liegen in einer Ebene ε.

Beweis:
"($\Leftarrow$)" Richtung schon bewiesen mit früherem Satz (?):
"Je zwei Geraden in der projektiven Ebene schneiden einander in einem Punkt."
Gilt das auch für zwei verschiedene Geraden $h \neq g$ in der Fernebene?
Dann ist g Ferngerade einer eigentlichen Ebene α und h Ferngerade einer eigentlichen Ebene β.
Fall a: $\alpha \parallel \beta$
Dann ist $g = h$ im Widerspruch zur Voraus
Fall b: $\alpha \nparallel \beta$.
Dann ist $\alpha \cap \beta$ eine eigentliche Gerade k.
Der Fernpunkt S von k liegt in α, also auf g und in β, also auf $h \Rightarrow g \cap h = \{S\}$.

(g ist Ferngerade der Schar der zu α parallelen Ebenen und h Ferngerade der Schar der zu β parallelen Ebenen.

Diese beiden Ebenenscharen schneiden einander in einer Schar paralleler Geraden zu $k = \alpha \cap \beta$, deren gemeinsamer Fernpunkt S ist der Schnittpunkt der Ferngeraden g und h von α und β, d.h.: $\{S\} = g \cap h$.)

Um zu zeigen, dass der Satz **allgemeimen im Projektiven** gilt, ist zu untersuchen, ob er auch gilt, wenn g oder h oder beide Ferngeraden sind.

"($\Rightarrow$)" Vor.: $g \cap h = \{S\}$. Zu zeigen: $g, h \subset \varepsilon$

1.Fall: $g \neq h$ sind beide eigentlich.
Fall a: S eigentlich $\Rightarrow g, h \subset \varepsilon$. (eukl. klar)
Fall b: S Fernpunkt $\Rightarrow g \parallel h \Rightarrow g, h \subset \varepsilon$.

2.Fall: g ist Ferngerade und h ist eigentliche Gerade:
Dann ist g Ferngerade einer eigentlichen Ebene ε' und aller zu ε' parallelen Ebenen.
Wegen $S \in g \subset \varepsilon'$ ist S Fernpunkt einer eigentlichen Geraden $h' \subset \varepsilon'$ und aller zu h' parallelen Geraden.
Wegen $S \in h$ (nach Voraus.) liegt $h \parallel h'$.
Die Parallelebene ε zu ε' durch h enthält h und hat dieselbe Ferngerade g wie ε'.
$\Rightarrow g, h \subset \varepsilon \Rightarrow$ Beh..

3.Fall: $g \neq h$ sind beide Ferngeraden.
Dann ist nichts zu zeigen, weil g und h beide in der Fernebene liegen.

So ähnlich beweist man die Allgemeingültigkeit weiterer Aussagen über den projektiv abgeschlossenen euklidischen Raum **einmalig**, um sie dann allgemein verwenden zu können, z.B.:

Satz: Drei Ebenen haben immer mindestens einen Punkt gemeinsam.

Satz: Zu einer Geraden g und einem Punkt $P \notin g$ gibt es genau eine Ebene ε mit $P \in \varepsilon$ und $g \subset \varepsilon$.
Siehe Übungen.

Satz: Zu zwei **windschiefen Geraden** g, h (Geraden, die nicht in einer Ebene liegen) gibt es durch jeden gegebenen Punkt $P \notin g \cup h$ genau eine **Treffgerade** k mit den Eigenschaften: $P \in k$, $k \cap g \neq \emptyset$, $k \cap h \neq \emptyset$.
Figur-2-1-2-Treffgerade

2.1.3 Zentralprojektion einer Ebene auf eine dazu nicht parallele Ebene

Figur-2-1-3-ZentralprojektionEbene

Urbildebene ε ("Landschaft")
Bildebene π ("Leinwand")
Projektionszentrum Z ("Auge")
Urbildpunkt $P \mapsto P'$ Bildpunkt
Urbildgerade $g \mapsto g'$ Bildgerade

Bilder von Punkten in ε sind Punkte in π, speziell
Bilder von **Verschwindungspunkten** in ε sind Fernpunkte in π

Bilder von Geraden in ε sind Geraden in π, speziell
Bild der Geraden der Verschwindungspunkte in ε ist die Ferngerade von π

Geraden in ε, die einander in einem Verschwindungspunkt schneiden, haben parallele Bilder in π.

Betrachte speziell: Blick in Richtung von f bzw. v.

Bilder paralleler Geraden in ε schneiden einander in einem **Fluchtpunkt** in π, dem Bild ihres Fernpunktes

Die Gerade der Fluchtpunkte in π, das Bild der Ferngeraden, ist der **Horizont**

Unter Einbeziehung von Fernpunkten ist $\varepsilon \leftrightarrow \pi$ bijektiv, ohne Ausnahmepunkte!

2.1.4 Anwendung: Vervollständigung der Perspektive eines Würfels mit karierten Seitenflächen

Siehe: Figur-2-1-4-Perspektive-Stabi
und Figur-2-1-4-PerspektiveWürfel

2.1.5 "Konstruktion" der Fernpunkte

Ein wenig Theorie:
Frage: Kann man (pA) (siehe 2.1.1) erreichen oder nur wünschen?
(Angabe eines Modells für die Fernpunkte)

Ist g' eine Gerade im **euklidischen** Raum, so bezeichne $F_{g'}$ die Menge aller zu g' parallelen Geraden, das **Parallelenbündel** von g'. Wir bezeichnen $F_{g'}$ als **Fernpunkt** von g' und setzen $g := g' \cup \{F_{g'}\}$.

Damit ist $F_{g'} \in g = g' \cup \{F_{g'}\}$.
Zu g betrachten wir $h = h' \cup \{F_{h'}\}$.
Damit gilt: $F_{g'} \in h$ (d.h. g und h haben denselben Fernpunkt $F_{g'}$) $\quad \Leftrightarrow$
Für die Parallelbündel gilt: $F_{g'} = F_{h'} \quad \Leftrightarrow$
$h' \in F_{g'} \quad \Leftrightarrow \quad g' \parallel h' \quad \Leftrightarrow \quad g \parallel h$.
Damit ist (pA) erfüllt.

(pA) führt nicht auf Widersprüche!

Das Modell ist nicht besonders anschaulich, aber es zeigt die logische Widerspruchsfreiheit von (pA).

Man kann sich vorstellen, dass der Fernpunkt auf der Geraden "unendlich weit weg" liegt. Aber Vorsicht:
Jede Gerade hat nur einen Fernpunkt, nicht zwei!

Es gibt auch andere Möglichkeiten, eine Ebene abzuschließen, zum Beispiel den **konformen Abschluss** (Gaußsche Zahlenebene), vgl. Stereographische Projektion der Kugel aus dem Nordpol auf die Tangentenebene im Südpol.

In $\mathbb{R}$ gibt es $+\infty$ und $-\infty$, in $\mathbb{C}$ nur ∞.

2.2 Geometrie im projektiv abgeschlossenen euklidischen Raum P^3

2.2.1 Zentralprojektion

Geg.: Bildebene π,
Projektionszentrum $Z \in P^3 \setminus \pi$,
Abbildungsvorschrift $P^3 \setminus \{Z\} \to \pi$,
$X \mapsto ZX \cap \pi =: X'$.

Vgl. Figur-2-2-1-ZentralprojektionRaum

Urbild	Bild
Z	kein Bild
Punkt $\neq Z$	Punkt
Gerade nicht durch Z	Gerade
Gerade durch Z	Punkt
Ebene nicht durch Z	π
Ebene durch Z	Gerade
Fernpunkt $\notin \pi$	eigentlicher Punkt
Fernpunkt $\in \pi$	gleich dem Urbild

Ist Z ein Fernpunkt, so wird die Zentralprojektion zu einer **Parallelprojektion**.
(Das ist ein Spezialfall, kein Grenzfall / Entartungsfall!)

2.2.2 Kollineationen

kollinear . . . auf einer Geraden liegend

Bezeichne im folgenden P^n für $n = 2$ die projektive Ebene und für $n = 3$ den projektiven Raum, allgemein den n-dim. proj. Raum.

Eine **Kollineation** κ des P^n ist eine bijektive Abbildung $\kappa : P^n \to P^n$, die Geraden auf Geraden abbildet.

Beh.: κ Kollineation $\Rightarrow \kappa^{-1}$ Kollineation

Bew.: Zu zeigen ist, dass das Urbild jeder Geraden eine Gerade ist.
Sei also g' Gerade (im Bild) $\Rightarrow$
$g' = A'B'$ mit $A' \in g'$ und $B' \in g' \Rightarrow$
$\kappa^{-1}(g') \subset P^n$ enthält mindestens die Punkte $A := \kappa^{-1}(A')$, $B := \kappa^{-1}(B')$.
Die Verbindungsgerade $AB =: g$ hat als Bild eine Gerade $\kappa(g)$, die $\kappa(A) = A'$ und $\kappa(B) = B'$ enthält, also gleich g' ist.
$\Rightarrow \kappa^{-1}(g') = g$, d.h. die Beh..

Der Beweis gilt für Kollineationen des P^2, des P^3, allgem. des P^n in gleicher Weise.

2.2.3 Kollineationen κ des P^3 mit Fixpunktebene γ und Fixpunkt $Z \notin \gamma$ (Homologien)

Vgl. Figur-2-2-3-Zentralkollineation

Geg.: Paar (X, X'), $X \notin \gamma \cup \{Z\}$,
$X' = \kappa(X) \in ZX \setminus (\gamma \cup \{Z\}\ )$

Ges.: $Y' := \kappa(Y)$ für $Y \notin \gamma \cup ZX$

$XY \cap \gamma =: S$ ist Fixpunkt $\Rightarrow$
$\kappa(XY) = \kappa(XS) = X'S \Rightarrow$
$Y' \in X'S$

$ZY \cap \gamma$ ist Fixpunkt $\Rightarrow$
ZY ist Fixgerade $\Rightarrow$
$Y' \in ZY\ \Rightarrow$

$Y' \in X'S \cap ZY$

Ist dadurch eine Kollineation gegeben?

Für Punkte auf $ZX \setminus \{Z\} \cup \gamma$ muss die Konstruktion des Bildpuktes noch definiert werden, z.B. mit dem Punktepaar (Y, Y').

κ ist tatsächlich eine Kollineation.

Der Beweis erfordert Fallunterscheidungen und das projektive Axiom von Desargues.

Frage: Was ist eine Homologie, bei der γ die Fernebene ist?

Jede Gerade durch Z ist Fixgerade und jede Gerade g, $Z \notin g$ wird auf $g' \parallel g$ abgebildet, da $S = g \cap \gamma = g' \cap \gamma$ Fernpunkt ist. D.h.: Es ist eine Zentrische Streckung mit Zentrum Z.

Frage: Was sind Eigenschaften einer Homologie, bei der Z ein Fernpunkt ist?

Die Verbindungsgeraden von Punkten zu ihren Bildpunkten XX' sind zueinander parallel, d.h. $XX' \parallel YY'$, da $Z \in XX'$ und $Z \in YY'$ Fernpunkt ist. Die Abbildung ist eine **perspektive Affinität** mit **Affinitätsachse** γ und **Affinitätsrichtung** XX'.

Frage: Was sind Eigenschaften einer Homologie, bei der Z der Fernpunkt eines Lotes von γ ist?

Die Affinitätsstrahlen XX' stehen normal zu γ (**normale Affinität**). Speziell für $X' \neq X$ mit Abstand $d(X, \gamma) = d(X', \gamma)$ erhält man die bekannte **Spiegelung an der Ebene** γ.

2.2.4 Harmonische Lage von vier Punkten auf einer Geraden

Vgl. Figur-2-2-4-HamonischeLage

Geg.: ebenes Vierseit $PQRS$ mit den Seiten $p := PQ$, $q := QR$, $r := RS$, $s := SP$
Schnittpunkte der Gegenseiten
$p \cap r =: \{A\}$, $q \cap s =: \{B\}$
Schnittpunkte von AB mit den Diagonalen
$AB \cap PR =: \{C\}$, $AB \cap QS =: \{D\}$
Dann heißen die vier Punkte A, B, C, D (in dieser Reihenfolge) **in harmonischer Lage**.

Satz: Sind A, B, C, D in harmonischer Lage, so auch A, B, D, C sowie B, A, C, D und B, A, D, C.

Bew.: Vertauschen von P mit S und Q mit R ändert A und B nicht, vertauscht aber C und D.
Vertauschen von Q mit S ändert C und D nicht, vertauscht aber A und B.
Zyklisches Vertauschen von $P \to Q \to R \to S \to P$ vertauscht die Punkte A und B und die Punkte C und D.

2.2.5 Doppelverhältnis (DV) von vier Punkten auf einer Geraden

Seien A, B, C, D vier verschiedene eigentliche Punkte auf einer Geraden. Dann heißt

$$\mathrm{DV}(ABCD) := \frac{d(A,C)}{d(B,C)} : \frac{d(A,D)}{d(B,D)} \cdot \varepsilon$$

mit $\varepsilon = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right\}$, falls das Punktepaar (A, B) das Punktepaar (C, D) $\left\{ \begin{array}{c} \text{nicht} \\ \end{array} \right\}$ trennt. Bei Verwendung **"gerichteter"** Strecken entfällt der Faktor ε.

Figur-2-2-5-DV1 (liefert zu a, b, c, d das DV λ)
Figur-2-2-5-DV2 (liefert zu a, b, c, λ den Wert d)

Mit Figur-2-2-5-DVtreue zeigen wir die DV-treue bei Zentralprojektion $g \to g'$.

Seien A, B, C, D vier verschiedene eigentliche Punkte einer Geraden g und Z ein Punkt $\notin g$. Dann gilt:

$$\varepsilon \mathrm{DV}(ABCD) = \frac{d(A,C)d(Z,g)}{d(B,C)d(Z,g)} : \frac{d(A,D)d(Z,g)}{d(B,D)d(Z,g)}$$

$d(A,C)d(Z,g)$ ist zweimal die Fläche von ΔACZ usw.

Für die folgenden Überlegungen sei die Reihenfolge der Punkte wie in der Ausgangsfigur. Dann ist $\varepsilon = 1$, und es gilt mit $d(A,C)d(Z,g) = d(A,Z)d(C,Z)\sin(\alpha+\beta)$ usw., vgl. Winkel in Figur bei Z:

$$\begin{aligned}\text{DV}(ABCD) &= \frac{d(A,Z)d(C,Z)\sin(\alpha+\beta)}{d(B,Z)d(C,Z)\sin\beta} : \\ &\qquad \frac{d(A,Z)d(D,Z)\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{d(B,Z)d(D,Z)\sin(\beta+\gamma)} \\ &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta)} : \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)} \qquad (*)\end{aligned}$$

DV$(ABCD)$ hängt (bis aufs Vorzeichen) nur ab von den Winkeln α, β und γ in Z.

Aus (*) folgt:

(1) Bei anderem Z erhält man andere α, β, γ, aber (*) bleibt unverändert.

(2) Bei Zentralprojektion (aus Z) von $g \to g'$ ändern sich α, β, γ nicht, also auch nicht (*), also auch nicht DV$(ABCD)$. D.h.: DV$(A'B'C'D')$ = DV$(ABCD)$.

Permutationen der vier Punkte A, B, C, D:

DV($ABCD$) $=: \lambda$
DV($AB\underline{DC}$) $= \frac{1}{\lambda}$ (ändert Lage von AB zu CD nicht)
DV($A\underline{CB}D$) $= 1 - \lambda$ (längere R., Vorzeichenwechs.)
DV($ACDB$) $=$
DV($ADBC$) $=$
DV($ADCB$) $=$

DV($\underline{BA}CD$) $= \frac{1}{\lambda}$ (ändert Lage von AB zu CD nicht)
DV($BA\underline{DC}$) $= \lambda$ (Warum ?)
DV($BCAD$) $=$
DV($BCDA$) $=$
DV($BDAC$) $=$
DV($BDCA$) $=$

DV($CABD$) $=$
DV($CADB$) $=$
DV($CBAD$) $=$
DV($CBDA$) $=$
DV($CDAB$) $=$
DV($CDBA$) $=$

DV($ABCD$) $=: \lambda = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$ mit gericht. Strecken $\overrightarrow{AC}, \ldots$ $\Rightarrow$

DV($AB\underline{CD}$)DV($AB\underline{DC}$) $= \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} \cdot \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} : \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} \cdot \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AD}} \cdot \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AC}}$

$= 1 =$

DV($\underline{AB}CD$)DV($\underline{BA}CD$) $= \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AC}} : \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AD}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} \cdot \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AD}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AC}} \cdot \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$

DV($DABC$) =
DV($DACB$) =
DV($DBAC$) =
DV($DBCA$) =
DV($DCAB$) =
DV($DCBA$) =

"Entartungsfälle":

$D \to$ Fernpunkt $\Rightarrow$
DV($ABCD$) $=: \lambda \to \frac{d(A,C)}{d(B,C)} \cdot \varepsilon$

Das ist ein Teilverhältnis TV(ABC).
($\varepsilon = 1$, falls A, B auf derselben Seite von C.)

$A \to B \Rightarrow \lambda \to 1$
$A \to C \Rightarrow \lambda \to 0$
$A \to D \Rightarrow \lambda \to \infty$

$B \to C \Rightarrow \lambda \to \infty$
$B \to D \Rightarrow \lambda \to 0$

$C \to D \Rightarrow \lambda \to 1$

2.2.6 Konstruktion des vierten harmonischen Punktes D zu drei Punkten A, B, C

Figur-2-2-6-KonstruktionHarmonischeLage

Geg.: Gerade g, darauf drei Punkte A, B, C

Ges.: Punkt D, so dass A, B, C, D in harmonischer Lage

("Umkehrung" der Konstruktion in Figur 2-2-4-HamonischeLage)

Wähle Hilfsgerade durch A, darauf zwei Punkte P und S
Verbinde C mit P und B mit S:
Schnittpunkt R
Verbinde A mit R und B mit P:
Schnittpunkt Q
SQ schneidet g in D.

2.2.7 DV von vier Punkten in harmonischer Lage?

Figur-2-2-7-DV-HarmonischeLage

$PR \cap QS =: \{Z\}$
$BZ \cap PS =: \{B'\}$
$BZ \cap QR =: \{B''\}$

Projektion von g aus Z auf AP führt über:
$(A, B, C, D) \to (A'{=}A, B', C'{=}P, D'{=}S) \Rightarrow$
$\mathsf{DV}(ABCD) = \mathsf{DV}(AB'PS)$

Projektion von AP aus B auf AQ führt über: (A, B', P, S)
$\to (A''{=}A, B'', C''{=}Q, D''{=}R) \Rightarrow$
$\mathsf{DV}(AB'PS) = \mathsf{DV}(AB''QR)$

Projektion von AQ aus Z auf g führt über:
$(A, B'', Q, R) \to (A, B, D, C) \Rightarrow$
$\mathsf{DV}(AB''QR) = \mathsf{DV}(ABDC)$

Insgesamt folgt:

$\lambda :=$ DV$(ABCD)$ = DV$(ABDC)$ =(nach 2.2.5)$= \frac{1}{\lambda} < 0$, da das Paar (A, B) das Paar (C, D) trennt.

$\lambda = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = -1$

Satz: Sind die vier Punkte A, B, C, D auf einer Geraden g in dieser Reihenfolge in harmonischer Lage, so ist

$$\text{DV}(ABCD) = -1.$$

2.2.8 DV unter Kollineationen

Satz: Jede Kollineation κ des P^n, $n \geq 2$ bildet Ebenen auf Ebenen ab.

Bew.: Eine Ebene ε sei festgelegt durch zwei (einander schneidende) Geraden g, h, $S = g \cap h$.

Sei $P \in \varepsilon := gh$ beliebig.
Eine Hilfsgerade k mit $P \in k \subset \varepsilon$ mit $S \notin k$, schneide g, h in G, H.

Dann liegt $\kappa(P)$ auf
$\kappa(GH) = \kappa(G)\kappa(H) \subset \kappa(g)\kappa(h) =: \varepsilon' \quad \Rightarrow$

$\kappa(\varepsilon)$ ist enthalten in einer Ebene ε':
$\kappa(\varepsilon) \subset \varepsilon' \quad \overset{\kappa^{-1}}{\Rightarrow} \quad \varepsilon \subset \kappa^{-1}(\varepsilon') \subset \varepsilon$

Das letzte "$\subset$" gilt, weil auch κ^{-1} eine Kollineation ist, und zeigt, dass es zu jedem Punkt in ε' einen Urbildpunkt in ε gibt.

Damit ist $\kappa(\varepsilon) = \varepsilon'$. Q.E.D.

(Q.E.D. = quod erat demonstrandum = was zu beweisen war = w.z.b.w.)

Satz: Jede Kollineation κ lässt harmonische Lage von Punkten unverändert.

Bew.: Betrachte die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes nach 2.2.6 in ε und im Bild $\kappa(\varepsilon)$.

Lassen Kollineationen auch das DV von vier Punkten einer Gerade invariant/unverändert?

Leider gilt das nicht allgemein.

Aber in projektiv abgeschlossenen euklidischen Räumen gilt:

Im projektiv abgeschlossenen euklidischen Raum $P^n, n \geq 2$ bilden **die Kollineationen** zugleich **die Projektivitäten** (die Gruppe der bijektiven linearen Abbildungen $P^n \to P^n$), und es gilt, dass diese alle DVe invariant lassen, vgl. 3.2.3.

Projektivitäten, bei denen alle Bilder von Fernpunkten wieder Fernpunkte sind, heißen **Affinitäten**.

Affinitäten lassen alle Teilverhältnisse unverändert.

Bew.: TV(ABC) = DV($ABCD$), wobei D der Fernpunkt der Geraden durch A, B und C ist.
(Siehe 2.2.5)
Für die Bildpunkte A', B', C', D' unter einer Affinität α gilt:

DV($A'B'C'D'$) = DV($ABCD$), weil α eine Projektivität ist,
und DV($A'B'C'D'$) = TV($A'B'C'$), weil $\alpha(D) = D'$ ein Fernpunkt ist.

Folglich ist TV($A'B'C'$) = TV(ABC).