Geometrie LB Blatt 10 Übungen

Notiztitel 01.12.2014

T24 $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \\ t^2 \end{pmatrix}$, $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$, $\ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$, $\dddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

a) $(\dot{\vec{x}}(t))^2 =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\forall t \in (-\pi, \pi) \Rightarrow c$ ist regulär oder

$\left(\dot{\vec{x}}(t) = \vec{0} \overset{(3.\text{Komp.})}{\Rightarrow} t = 0 \overset{(2.\text{Komp.})}{\Rightarrow} 3 \cdot \cos \underset{=0}{t} = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{Regularität}\right)$

klar

$\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2) \overset{(3.\text{Komp.})}{\Rightarrow}$ $\qquad \underset{t_1 = -t_2}{\Rightarrow}$ 1. Komp. / 2. Komp.

$\Leftrightarrow 6 \sin t_2 = 0 \Leftrightarrow t_2 = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$ mit $t_2 \in (-\pi, \pi) \Rightarrow k = 0$, $t_1 = t_2 = 0$ ✓

Für $k = 1$ folgt: $\underset{A}{\vec{x}(-\pi)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ \pi^2 \end{pmatrix} = \underset{E}{\vec{x}(\pi)}$ (Doppelpunkt in $[-\pi, \pi]$)

b) zugehörige Tangentenvektoren: $\dot{\vec{x}}(\pi) =$ $\qquad\qquad$ $\nparallel \dot{\vec{x}}(-\pi) =$

c) $s = \int_{-\pi}^{\pi} |\dot{\vec{x}}(t)| \, dt = \int_{-\pi}^{\pi}$ $\qquad\qquad$ $dt =$

Symmetrie $\qquad\qquad$ Formelsammlung

d) Schmiegebene σ: $\vec{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{x}(t) + \lambda \dot{\vec{x}}(t) + \mu \cdot \ddot{\vec{x}}(t)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Punkt-Richtungsform

hat Normale $\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t) =$

Richtung des Binormalenvektors

$\Rightarrow \sigma: (\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}) \cdot (\vec{y} - \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow (\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}) \cdot \vec{y} = (\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}) \cdot \vec{x}$ $\qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \\ t^2 \end{pmatrix}$

Einsetzen liefert Koord. gleichung

σ:

$R(0, 0, 6) \in \sigma \Leftrightarrow$

Koord. Einsetzen.

(2. Weg über Punkt-Richtungsform umständlicher?)

e) Krümmung $\kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3}$, Torsion $\tau(t) = \frac{\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}})}{(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2}$

(allgem. Param.) (allgem. Param.)

$(\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t))^2 =$

$\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}}) = \det(\dot{\vec{x}} + \dddot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}}) =$

Determinantenumformungen Entwicklung nach 1. Spalte

Spatprodukt

2. Weg: $\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}}) = (\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}) \cdot \dddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 6\cos t + 6t\sin t \\ 6\sin t - 6t\cos t \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3\sin t \\ -3\cos t \\ 0 \end{pmatrix} = 18t$

$\Rightarrow \tau(t) =$

Zusatz ?

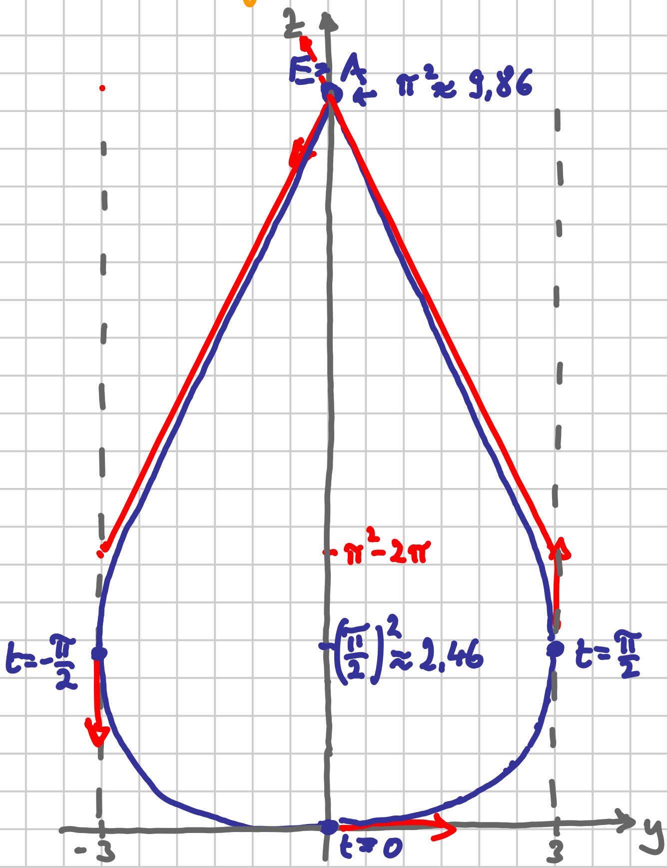
$\kappa(t)$ extremal $\Leftrightarrow (\kappa(t))^2 = \frac{117 + 36t^2}{(9+4t^2)^3} =: f(t)$ extremal

$\Leftrightarrow \dot{f}(t) = \frac{df}{dt} = \frac{72t(9+4t^2)^{\cancel{3}\,1} - (117+36t^2)\cdot 3 \cdot \cancel{(9+4t^2)^2 \cdot 8t}}{(9+4t^2)^{\cancel{6}\,4}} = 0 \Leftrightarrow$ Zähler 0

$\Leftrightarrow 24t\,[3\cdot(9+4t^2) - (117+36t^2)] = 0 \Leftrightarrow t\,[\underbrace{-90-24t^2}_{<0\ \forall t\,!}] = 0 \Leftrightarrow \underline{t=0}$

f) Normalprojektion c^*: $\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} =$, $t \in [-\pi, \pi]$

(durch Weglassen von $x(t)$)



$\begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} =$

Betrachte Punkte und Tangentenrichtungen für $t=0$, $t=\pm\frac{\pi}{2}$, $t=\pm\pi$

Zusatz: c liegt auf dem Drehzylinder Δ: $x^2+y^2=9$ mit z-Achse als Drehachse (klar durch Einsetzen !)

Aus obigen Formeln für $\kappa(t)$ und $\tau(t)$ ergeben sich im Fall dass t die Bogenlänge ist die Formeln $\kappa(s)$ und $\tau(s)$, da t ist Bogenlänge $\Leftrightarrow |\dot{\vec{x}}(t)| = 1\ \forall t$ und $(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2 = (\dot{\vec{x}})^2(\ddot{\vec{x}})^2 - \underbrace{(\dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}})^2}_{=0}$

Lagrange $= (\ddot{\vec{x}})^2$

$\Rightarrow \kappa = |\ddot{\vec{x}}|$ und $\tau = \frac{\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}})}{(\ddot{\vec{x}})^2}$

T25 $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 4-3t^2 \\ 6t^3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$, $\dot{\vec{x}}(t) =$, $\ddot{\vec{x}}(t) =$, $\dddot{\vec{x}}(t) =$

a) c regulär $\Leftrightarrow$ $\dot{\vec{x}}(t) \neq \vec{0} \ \forall t \in \mathbb{R}$ klar wegen 1. Komponente

c doppelpunktfrei $\Leftrightarrow$ Aus $\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2)$ folgt $t_1 = t_2$
klar wegen 1. Komponente

c W-punktfrei $\Leftrightarrow$ $\dot{\vec{x}}(t)$ und $\ddot{\vec{x}}(t)$ sind für alle $t \in \mathbb{R}$ linear unabhängig, d.h. spannen die Schmiegebene in $\vec{x}(t)$ auf

$\Big($ $\Leftrightarrow$ Ansatz $\lambda \dot{\vec{x}}(t) + \mu \ddot{\vec{x}}(t) = \vec{0}$ $\Rightarrow$ 1. Komp. $\lambda = 0$ und 2. Komp. $\mu = 0$ $\Big)$

Kurve im $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow \Leftrightarrow$ $\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t) \neq \vec{0}$ für alle $t \in \mathbb{R}$

$\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t) =$ wegen 3. Komponente

b) Bogenlänge $(\dot{\vec{x}}(t))^2 = 1 + 36t^2 + (18t^2)^2 = (1+18t^2)^2$

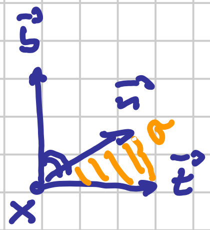
$s(t) = \int_{t_0=0}^{t} |\dot{\vec{x}}(u)| \, du = \int_0^t \sqrt{(\dot{\vec{x}}(u))^2} \, du =$
o.E.

Krümmung $\kappa(t) = \dfrac{|\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t)|}{|\dot{\vec{x}}(t)|^3} =$

$(\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t))^2 = 36 \cdot [(18t^2)^2 + 36t^2 + 1] = 36 \cdot (18t^2+1)^2$

Torsion $\tau(t) = \dfrac{\det(\dot{\vec{x}} \ \ddot{\vec{x}} \ \dddot{\vec{x}})}{(\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}})^2} =$

$\det(\dot{\vec{x}} \ \ddot{\vec{x}} \ \dddot{\vec{x}}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6t & -6 & 0 \\ 18t^2 & 36t & 36 \end{pmatrix} = -6 \cdot 36$



c) Frenet-Dreibein $\vec{t}(t), \vec{n}(t), \vec{b}(t)$ (ONB)

$\vec{t}(t)$ Tangenten(einheits)vektor $\vec{t}(t) = \dfrac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|} =$

$\vec{n}(t)$ (Haupt)Normalenvektor und $\vec{b}(t)$ Binormalenvektor

$\vec{n}(t)$ spannt (in nicht-W-Punkt) zusammen mit $\vec{t}(t)$ die Schmiegebene σ: $\vec{y} = \vec{x}(t) + \lambda \dot{\vec{x}}(t) + \mu \ddot{\vec{x}}(t)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ auf.

Deren Normalenvektor ist (im $\mathbb{R}^3$) der Binormalenvektor

$$\vec{b}(t) = \frac{\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t)|} =$$

$$\vec{n}(t) = \vec{b}(t) \times \vec{t}(t) =$$

$$1-(18t^2)^2 = (1+18t^2)(1-18t^2)$$

d) $\alpha = \sphericalangle(\dot{\vec{x}}, \vec{a})$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\dot{\vec{x}} \cdot \vec{a}}{|\dot{\vec{x}}||\vec{a}|}$

Zusatz: Wie folgt, kann man zu c die Böschungsrichtung bestimmen: nicht verlangt!

c ist Böschungslinie $\Leftrightarrow \exists\, \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ mit $\cos \underbrace{\sphericalangle(\dot{\vec{x}}, \vec{a})}_{=\alpha} = \frac{\dot{\vec{x}}(t) \cdot \vec{a}}{|\dot{\vec{x}}(t)||\vec{a}|} = c = \text{const.}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \dot{\vec{x}}(t) \cdot \vec{a} = |\dot{\vec{x}}(t)| \cdot \tilde{c}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{c} = |\vec{a}| \cdot c = \text{const.}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -6t \\ 18t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (1+18t^2) \cdot \tilde{c}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow a_1 - 6t a_2 + 18t^2 a_3 = \tilde{c} + 18t^2 \cdot \tilde{c}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \underline{(a_1 - \tilde{c})} - 6t \underline{a_2} + 18t^2 \underline{(a_3 - \tilde{c})} = 0$ $\underline{\forall t \in \mathbb{R}}$.

Analysis
$\Leftrightarrow a_1 - \tilde{c} = 0$ und $a_2 = 0$ und $a_3 - \tilde{c} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} \tilde{c} \\ 0 \\ \tilde{c} \end{pmatrix}$ mit $\tilde{c} \neq 0$

Böschungsrichtung

Die Funktionen $t^0, t^1, t^2, \ldots t^n$, $n \in \mathbb{N}$ sind linear unabhängig d.h. eine Linearkombination ist die Nullfunktion $\Leftrightarrow$ alle Koeff $= 0$

2. Begründung ohne diesen Satz: Wähle $t = 0 \Rightarrow a_1 = \tilde{c}$, dividiere durch t und setze wieder $t = 0 \Rightarrow a_2 = 0$ =(nochmals)$\Rightarrow a_3 = \tilde{c}$

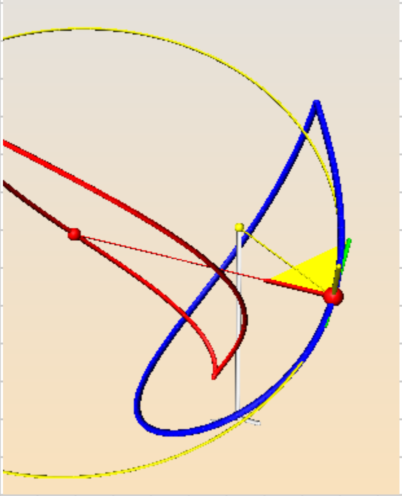
3. Weg: Wähle $t=0$, $t=1$, $t=-1 \Rightarrow$ LGS

$$\begin{aligned} a_1 - \tilde{c} &= 0 \\ a_1 - \tilde{c} - 6a_2 + 18(a_3 - \tilde{c}) &= 0 \\ a_1 - \tilde{c} + 6a_2 + 18(a_3 - \tilde{c}) &= 0 \end{aligned}$$

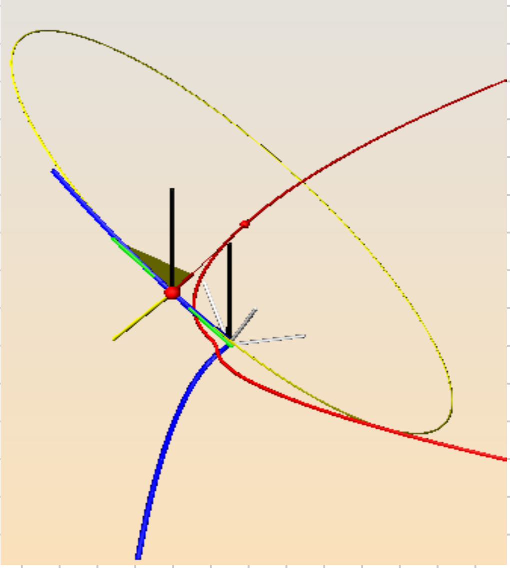
$\Rightarrow a_1 = \tilde{c} = a_3$ und $a_2 = 0$

(c ist Böschungslinie zur Richtung $\vec{a} = \tau \vec{t} + \kappa \vec{b} \Leftrightarrow \frac{\tau}{\kappa} = \cot\alpha = \text{const}$)

Figur zu T 24.
mit Frenet-Dreibein
Schmiegebene (gelb)
Krümmungskreis (gelb)
und Evolute (rot)



Figur zu T 25 mit Böschungsrichtung (schwarz)
Krümmungskreis (gelb) und Evolute (rot)



Zusatz vgl. Kapitel 6.12.13

Evolute: Kurve der Krümmungskreismittelpunkte

$$\vec{m}(t) = \vec{x}(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \cdot \vec{n}(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} t \\ 4-3t^2 \\ 6t^3 \end{pmatrix} + \frac{(1+18t^2)^{\cancel{2}}}{6} \cdot \frac{1}{\cancel{1+18t^2}} \begin{pmatrix} -6t \\ 18t^2-1 \\ 6t \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -18t^3 \\ \frac{23}{6} - 3t^2 + 54t^4 \\ t + 24t^3 \end{pmatrix}}$$

Param. darst. der Evolute.