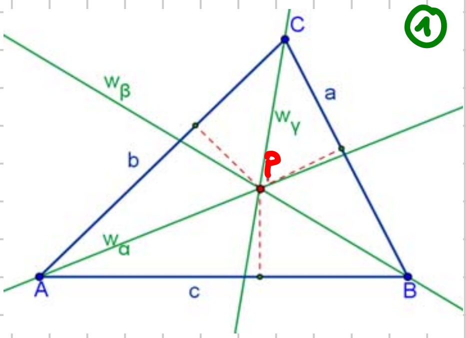
WS 2013/14 Geometrie LB Klausur WS 12/13

Aufgabe 1 (ca. 4 Punkte)

In der euklidischen Ebene gilt:

Ein Punkt P liegt genau dann auf einer Winkelhalbierenden w zweier einander schneidender Geraden g und h, wenn die Abstände $d(P,g), d(P,h)$ von P zu den Geraden g und h gleich sind. in Zeichen: $P \in w \;\Leftrightarrow\; d(P,g) = d(P,h)$

Beweisen Sie mit Hilfe dieser bereits bewiesenen Aussage, dass die Innenwinkelhalbierenden eines (nicht entarteten) Dreiecks einander in einem Punkt schneiden.



1

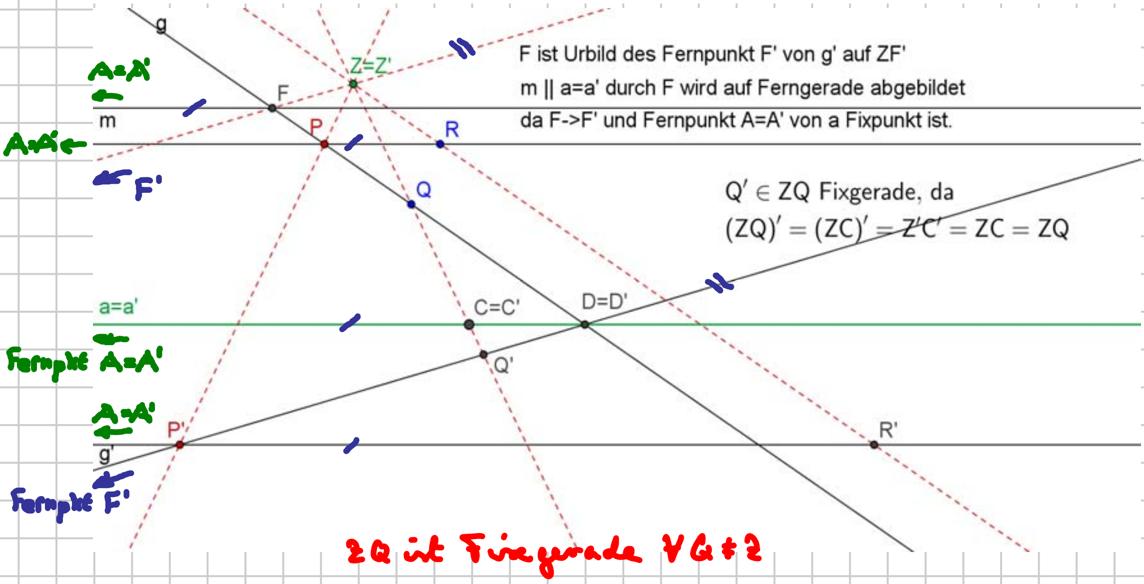
$P = w_\alpha \cap w_\beta \Leftrightarrow d(P,c) = d(P,b)$ (w_α) und $d(P,a) = d(P,c)$ (w_β) 2

$\Rightarrow d(P,a) = d(P,b)$ (w_γ) $\Leftrightarrow P \in w_\gamma$ 1

Aufgabe 2 (ca. 6 Punkte)

In der projektiv abgeschlossenen euklidischen Ebene $\mathbf{P}^2$ sei eine ebene Kollineation $\varphi : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ gegeben durch Vorgabe eines Fixpunktes Z, einer Fixpunktgeraden a und eines Punktepaars (P, P'), $P' = \varphi(P) \neq P$.

Ferner seien gegeben die Punkte Q und R mit $PR \parallel a$, vgl. Angabe.



g' 1
Q' 1
R' 1
F 2
f 1

Konstruieren Sie

a) die Bilder g', Q' der Geraden $g = PQ$ und des Punktes Q,

b) das Bild R' des Punktes R,

c) den Punkt F der Geraden $g = PQ$, der auf einen Fernpunkt abgebildet wird,

d) den Ort aller Punkte, die auf Fernpunkte abgebildet werden.

Hinweis: Es genügt die Konstruktion der gesuchten Objekte, eine ausführliche Konstruktionsbeschreibung ist **nicht** erforderlich!

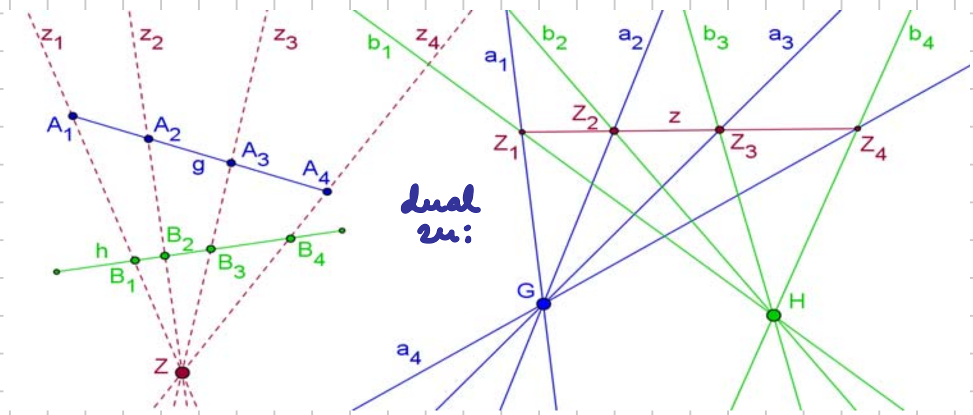
Aufgabe 3 (ca. 5 Punkte)

In der projektiv erweiterten euklidischen Ebene $\mathbf{P}^2$ gilt:

Sind g, h zwei Geraden, $Z \in \mathbf{P}^2 \backslash (g \cup h)$ und $A_1, A_2, A_3, A_4 \in g$ vier verschiedene Punkte der Geraden g. Dann gilt mit $B_i := A_i Z \cap h, (i = 1, .., 4) : DV(B_1, B_2, B_3, B_4) = DV(A_1, A_2, A_3, A_4)$

a) Skizzieren Sie diesen Sachverhalt.

b) Dualisieren Sie diese Aussage und skizzieren Sie die dualisierte Aussage.



Skizze ①

duale Skizze ①

Sind G, H zwei Punkte, z eine Gerade $(G, H \notin z)$ und ①

a_1, a_2, a_3, a_4 vier verschiedene Geraden durch G.

Dann gilt für die Verbindungsgeraden b_i von H mit den ①

Schnittpunkten $Z_i = a_i \cap z$: $DV(a_1, a_2, a_3, a_4) = DV(b_1, b_2, b_3, b_4)$

①

Aufgabe 4 (ca. 6 Punkte)

In der projektiven Ebene $\mathbf{P}^2$ seien die Gerade $g:\ 5x_1 - x_2 = 0$ und der Kegelschnitt

$k:\ \vec{x}^T A \vec{x} = 0$ mit $A = A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ in homogenen Koordinaten gegeben.

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte Q_1, Q_2 von g und k.

b) Zeigen Sie, dass $t_1:\ 4x_0 - 3x_1 - x_2 = 0$ und $t_2:\ 4x_0 + 3x_1 + x_2 = 0$ die Gleichungen der Tangenten an k in den Punkten $Q_{1,2}$ sind.

c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt $P = t_1 \cap t_2$ der beiden Tangenten aus Aufgabe b).

d) Wie liegt die Polare von P bezüglich des Kegelschnitts k zur Geraden g?

hom. Faktor

a) $\left.\begin{array}{l} k:\ \vec{x}^T A \vec{x} = x_0^2 + x_1^2 - x_1 x_2 = 0 \\ g:\ 5x_1 - x_2 = 0 \iff x_2 = 5x_1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_0^2 + x_1^2 - 5x_1^2 = 0 \iff x_0 = \pm 2 x_1 \Rightarrow Q_{1,2} = x_1 \begin{pmatrix} \pm 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ②

b) Tgt an k in $Q_{1,2}$ ist $t_{1,2}$: $0 = \vec{x}^T A \vec{q}_{1,2} = \vec{x}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{x}^T \cdot \begin{pmatrix} \pm 2 \\ -3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

$\iff \pm 4x_0 - 3x_1 - x_2 = 0$ qed. ②

hom. Geradenkoord

c) $P: \vec{p} = \begin{pmatrix} +4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -24 \end{pmatrix} = 8 \cdot \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}}$ hom. Punktkoord. (1)

hom. Geradenkoord.

d) Polare zu P bzgl. K: $0 = \vec{x}^T A \vec{p} = \vec{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \vec{x}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 5/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 5x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow \underline{p \equiv g}$ (1)

Alternativ zu c) P ist Pol zu g bzgl. K: $\Leftrightarrow A\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \vec{p} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}}$

Aufgabe 5 (ca. 10 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sei eine C^∞–Kurve c gegeben durch die Parameterdarstellung:

$$c: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \cos t \\ t^2 \sin t \\ 2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass c regulär und einfach ist.

b) Berechnen Sie die Länge s des Kurvenbogens von $O = (0,0,0)$ bis zum Schnittpunkt von c mit der Ebene $z = 6$.

c) Geben Sie den Mittelpunkt $\vec{m}(0)$ des Krümmungskreises von c im Punkt $\vec{x}(0)$ an.

a) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2\cos t \\ t^2 \sin t \\ 2t \end{pmatrix}$, $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2t\cos t - t^2 \sin t \\ 2t \sin t + t^2 \cos t \\ 2 \end{pmatrix}$, $\ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} (2-t^2)\cos t - 4t\sin t \\ (2-t^2)\sin t + 4t\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$

$\dot{\vec{x}}(t) \neq 0 \ \forall t$ (3. Komp.) $\Rightarrow$ $\underline{c \text{ regulär}}$ (1) (1)

$\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$ (3. Komp.) $\Rightarrow$ $\underline{c \text{ einfach}}$ ✓ (1)

b) $|\dot{\vec{x}}(t)|^2 = 4t^2 + t^4 + 4 = (t^2+2)^2$; $O \in c \Leftrightarrow t = 0$; $z = 6 \Leftrightarrow t = 3$ (1)

$\Rightarrow s = \int_0^3 t^2 + 2 \, dt = \frac{1}{3}t^3 + 2t = 9 + 6 = 15$ (1) (1)

c) <u>An der Stelle $t=0$:</u> $\dot{\vec{x}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\ddot{\vec{x}}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}}(0) \times \ddot{\vec{x}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ (1)

$\kappa(0) = \dfrac{|\dot{\vec{x}}(0) \times \ddot{\vec{x}}(0)|}{|\dot{\vec{x}}(0)|^3} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$; (1)

$\vec{t}(0) = \dfrac{\dot{\vec{x}}(0)}{|\dot{\vec{x}}(0)|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}(0) = \dfrac{\dot{\vec{x}}(0) \times \ddot{\vec{x}}(0)}{|\dot{\vec{x}}(0) \times \ddot{\vec{x}}(0)|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}(0) = \vec{b}(0) \times \vec{t}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (1)

$\Rightarrow \vec{m}(0) = \vec{x}(0) + \dfrac{1}{\kappa(0)} \cdot \vec{n}(0) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (1)

Aufgabe 6 (ca. 9 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sei eine $C^\infty-$Fläche Φ gegeben durch die Parameterdarstellung:

$$\Phi:\ \vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} 2u\,\cos v \\ 2u\,\sin v \\ u^2+v \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass $g = 4\,(2u^2+1)^2$ die Determinante der metrischen Fundamentalgrößen von Φ ist.

b) Zeigen Sie, dass der Winkel γ zwischen den Parameterlinien von Φ längs der $v-$Linien konstant ist.

c) Bestimmen Sie die Oberfläche O des Flächenstücks von Φ über dem Parametergebiet $G = [0,1]\times[0,\pi]$.

a) $\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} 2u\cos v \\ 2u\sin v \\ u^2+v \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_u = \begin{pmatrix} 2\cos v \\ 2\sin v \\ 2u \end{pmatrix},\ \vec{x}_v = \begin{pmatrix} -2u\sin v \\ 2u\cos v \\ 1 \end{pmatrix}$ 1

$g_{11} = \vec{x}_u^{\,2} = 4+4u^2 = 4(1+u^2);\ g_{12} = \vec{x}_u\cdot\vec{x}_v = 2u,\ g_{22} = \vec{x}_v^{\,2} = 4u^2+1$ 2

$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = 4(1+u^2)(4u^2+1) - 4u^2 = 4[4u^2+1+4u^4+\cancel{u^2}-\cancel{u^2}] =$

$= 4(2u^2+1)^2$ g 1

b) $\cos\gamma = \dfrac{\vec{x}_u\cdot\vec{x}_v}{|\vec{x}_u||\vec{x}_v|} = \dfrac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}} = \dfrac{2u}{2\sqrt{1+u^2}\sqrt{4u^2+1}}$ hängt nicht von v ab $\Rightarrow$ Beh. cos γ 1

Begr. 1

c) $O = \int_0^1\int_0^\pi \sqrt{g(u,v)}\,dv\,du = \int_0^1\int_0^\pi 2(2u^2+1)\,dv\,du =$ 1 1

$= 2\pi\cdot\int_0^1 (2u^2+1)\,du = 2\pi\cdot\left[\frac{2}{3}u^3+u\right]_0^1 = \frac{10}{3}\cdot\pi$ 1