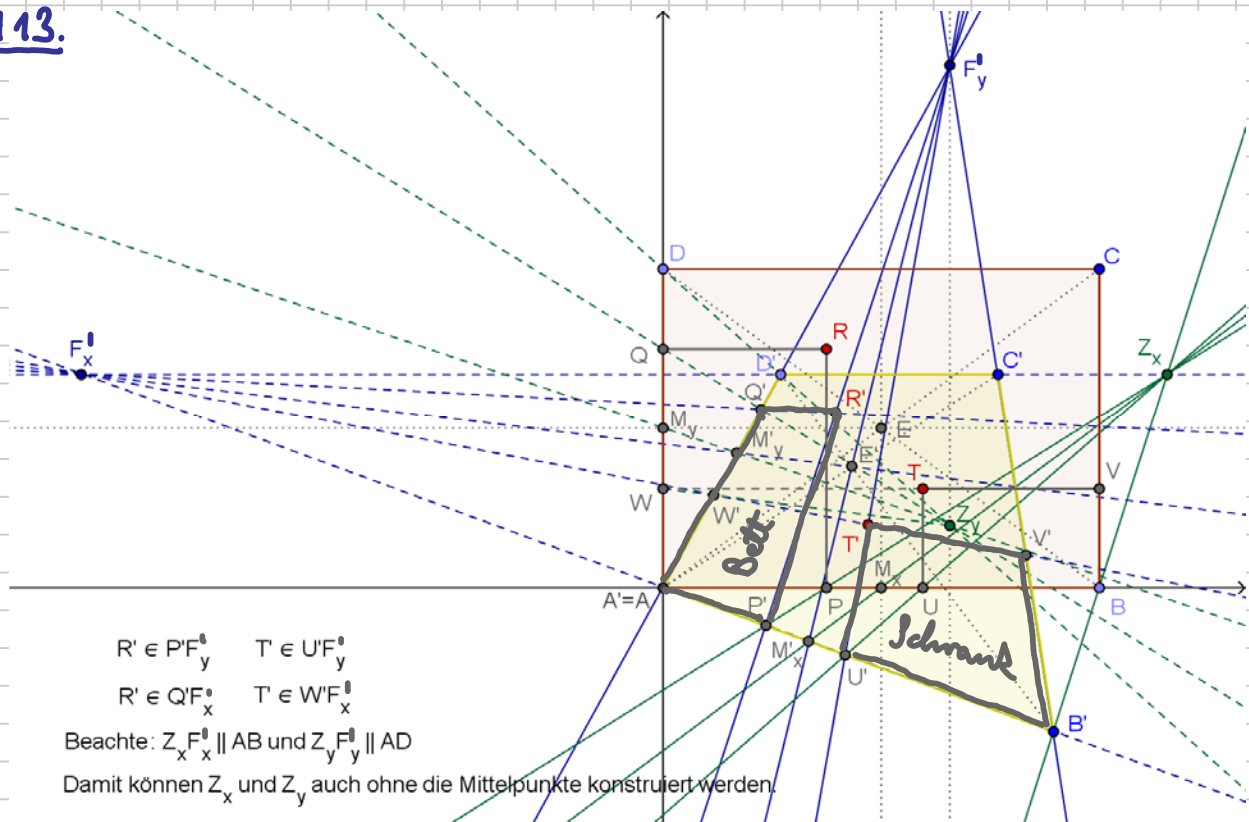


H13.



a) Konstruktionsbeschreibung:

- 1) Bilder der zur y -Achse parallelen Geraden schneiden einander in $F_y^0 = A'D' \cap B'C'$, (Fluchtpunkt der Geraden $\parallel y$ -Achse)
 Bilder der zur x -Achse parallelen Geraden schneiden einander in $F_x^0 = A'B' \cap C'D'$, (Fluchtpunkt der Geraden $\parallel x$ -Achse)
- 2) Das Bild des Diagonalschnittpunkt $E = AC \cap BD$ des Rechtecks $ABCD$ ist der Diagonalschnittpunkt $E' = A'B' \cap C'D'$ des Bildvierecks $A'B'C'D'$
- 3) Die Seitenmitten M_x, M_y liegen auf den Seiten AB, AD und es gilt $M_x E \parallel y$ -Achse, $M_y E \parallel x$ -Achse
 $\Rightarrow M_x' = F_y^0 E' \cap A'B'$ und $M_y' = F_x^0 E' \cap C'D'$.

b) Konstruktionsbeschreibung:

1) $z_x = BB' \cap M_x M_x'$ ist das Zentrum für die DV-Übertragung K_{z_x} von AB auf $A'B'$ mit $A=A'$

$\Rightarrow \begin{cases} P' = z_x P \cap A'B' \text{ und } R' \in F_y' P' \text{ (1), da } RP \parallel y\text{-Achse} \\ U' = z_x U \cap A'B' \text{ und } T' \in F_y' U' \text{ (2), da } TU \parallel y\text{-Achse} \end{cases}$
analog:

2) $z_y = DD' \cap M_y M_y'$ ist das Zentrum für die DV-Übertragung K_{z_y} von AD auf $A'D'$ mit $A=A'$

$\Rightarrow \begin{cases} Q' = z_y Q \cap A'D' \text{ und } R' \in F_x' Q' \text{ (3), da } QR \parallel x\text{-Achse} \\ \text{mit } W = TV \cap AD \\ W' = z_y W \cap A'D' \text{ und } T' \in F_x' W' \text{ (4), da } TV \parallel x\text{-Achse} \end{cases}$

$(1) \wedge (3) \Rightarrow R' = F_y' P' \cap F_x' Q'$ und $(2) \wedge (4) \Rightarrow T' = F_y' U' \cap F_x' W'$

Anmerkung:

K_{z_x} bildet Fernpunkt F_{AB} der Geraden AB auf

$F_x' = z_x F_{AB} \cap A'B'$ ab $\Rightarrow z_x F_x' \parallel AB = x\text{-Achse}$

$\parallel AB$ durch z_x

hier: $C'D'$ da $C'D' \parallel x\text{-Achse}$
 $\Rightarrow z_x \in C'D'$ ✓ / gegeben?

\Rightarrow alternative Konstruktion von z_x (ohne M_x und M_x' ?)

$z_x = BB' \cap h_{F_x}$ mit Parallelen h_{F_x} zur x -Achse durch F_x' .

analog:

K_{z_y} bildet Fernpunkt F_{AD} der Geraden AD auf

$F_y' = z_y F_{AD} \cap A'D'$ ab $\Rightarrow z_y F_y' \parallel AD = y\text{-Achse}$

\Rightarrow alternative Konstruktion von z_y (ohne M_y und M_y' ?)

$z_y = DD' \cap h_{F_y}$ mit Parallelen h_{F_y} zur y -Achse durch F_y' .

H14. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Punkte A(\vec{a}), C(\vec{c}), P(\vec{p}) eigentlich; B(\vec{b}), Z(\vec{z}) Fernpunkte

a) $\varepsilon = ABC : \vec{u}^T \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x}^T \vec{u} = 0$ mit $\vec{u} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$

$$\left. \begin{array}{l} A \in \varepsilon \Leftrightarrow \vec{a}^T \vec{u} = 0 \\ B \in \varepsilon \Leftrightarrow \vec{b}^T \vec{u} = 0 \\ C \in \varepsilon \Leftrightarrow \vec{c}^T \vec{u} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

homogenisiert
reiner Faktor

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

wähle z.B. $u_2 = \lambda$

alternativ: $\varepsilon = ABC : \vec{x} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}$, $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \neq 0$

\Rightarrow Gleichung von $\varepsilon : \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{x}) = 0$

d.h. $\vec{x} \neq \vec{0}$!

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & x_0 \\ 2 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 2 & 2 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 & x_3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 2 & 2 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot x_0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

↑
Entwicklung nach 1. Zeile

$$= 2x_3 + 2x_1 - 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_2 - 2x_1 - 2x_2 - x_0(4 + 2 - 4) =$$

$$= -2x_0 - 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0 \quad | : -2 \Leftrightarrow x_0 + x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \quad \text{vgl. oben}$$

homog. Faktor

b) $Z \notin \varepsilon \Leftrightarrow \vec{u}^T \vec{z} \neq 0 \Leftrightarrow (1 \ 1 \ 1 \ -3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \neq 0 \quad \checkmark$

c) Nach T16: $\vec{x}' = H\vec{x}$ mit:

$$H = (\underbrace{\vec{u}^T \vec{z}}_{\text{aus b})} \cdot E - (\vec{z} \vec{u}^T) = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 1 \ 1 \ -3)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & & & \\ & 3 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}}$$

$$d) P \vec{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

$$\text{Probe: } \vec{u}^T \vec{p}' = (1 \ 1 \ 1 \ -3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 + 2 + 4 - 9 = 0 \Rightarrow P'(\vec{p}') \in \mathcal{E}$$

$$\vec{p}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \vec{p} + 2 \cdot \vec{z} \Rightarrow P'(\vec{p}') \in P\mathcal{Z}$$

Faktoren geeignet gewählt!

$$\text{Probe: } M \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Bild von } A \text{ ist } A'$$

↑
homogenisierender Faktor

$\mathcal{Z} = \text{Fernpunkt} \Rightarrow \text{Zentralproj. ist Parallelproj. in Richtung } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$