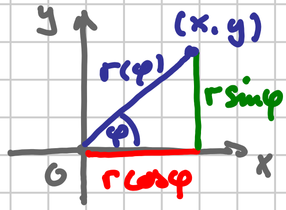
Geometrie LB Blatt 11 Hausaufgaben

Notiztitel 16.12.2014



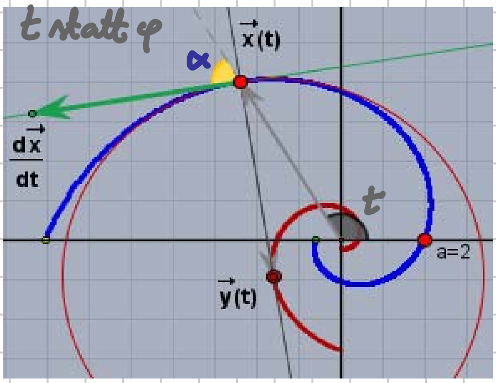
H25. Polarkoord. $r(\varphi)=ae^{b\varphi}$, $a,b>0$

$$\Rightarrow \vec{x}(\varphi)=\begin{pmatrix}x(\varphi)\\ y(\varphi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r(\varphi)\cos\varphi\\ r(\varphi)\sin\varphi\end{pmatrix}=$$

a) $\Rightarrow \dot{\vec{x}}(\varphi)=$

$(\dot{\vec{x}}(\varphi))^2=$

$s(\varphi)=\int_0^{\varphi}|\dot{\vec{x}}(u)|\,du=$



$$\lim_{\varphi\to-\infty}s(\varphi)=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+1}\lim_{\varphi\to-\infty}(e^{b\varphi}-1)=$$
$$=-\frac{a}{b}\sqrt{b^2+1}\quad \text{(endlich!)}$$

b) Gerade durch 0 und $\vec{x}(\varphi)$:

$\Rightarrow \cos\alpha=$

c) $\ddot{\vec{x}}(\varphi)=$

im Kopf!

$$\det(\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}})=a^2e^{2b\varphi}\det\begin{pmatrix}b\cos\varphi-\sin\varphi & (b^2-1)\cos\varphi-2b\sin\varphi\\ b\sin\varphi+\cos\varphi & (b^2-1)\sin\varphi+2b\cos\varphi\end{pmatrix}=\ldots=$$
$$=a^2e^{2b\varphi}\left(2b^2-(b^2-1)\right)=a^2e^{2b\varphi}(b^2+1)$$

$$\Rightarrow \kappa(\varphi)=\frac{\det(\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}})}{|\dot{\vec{x}}|^3}=\qquad =\frac{1}{|\dot{\vec{x}}(\varphi)|}\ (*)$$

$$\Rightarrow \text{Evolute } \vec{y}(\varphi)=\vec{x}(\varphi)+\frac{1}{\kappa(\varphi)}\vec{n}(\varphi)\quad\text{mit } \underset{\binom{-\beta}{\alpha}}{\underset{\shortparallel}{\vec{n}(\varphi)}}\perp\vec{t}(\varphi)=\frac{\dot{\vec{x}}(\varphi)}{|\dot{\vec{x}}(\varphi)|}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

$(\vec{t},\vec{n}$ rechts ONB$)$

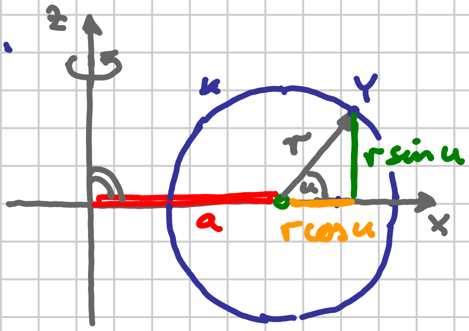
$$\Rightarrow \vec{y}(\varphi) = ae^{b\varphi}\begin{pmatrix}\cancel{\cos}\varphi\\ \cancel{\sin}\varphi\end{pmatrix} + \underbrace{\frac{1}{\kappa(\varphi)}\cdot\frac{1}{|\dot{\vec{x}}(\varphi)|}}_{=1 \text{ nach } (*)}\cdot ae^{b\varphi}\begin{pmatrix}-b\sin\varphi-\cancel{\cos\varphi}\\ b\cos\varphi-\cancel{\sin\varphi}\end{pmatrix} =$$

$$= abe^{b\varphi}\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix} = bae^{b\varphi}\begin{pmatrix}\cos(\varphi+\frac{\pi}{2})\\ \sin(\varphi+\frac{\pi}{2})\end{pmatrix} = \underline{b}\cdot\vec{x}(\varphi+\underline{\tfrac{\pi}{2}})$$

$\Rightarrow$ Die Evolute ist die um $\underline{\frac{\pi}{2}}$ gedrehte und mit dem Faktor $\underline{b}$ aus $O=(0,0)$ zentrisch gestreckte Kurve c !

Anmerkung: Für $b \approx 0.27441$ fällt die Evolute von c mit c sogar zusammen

H26.

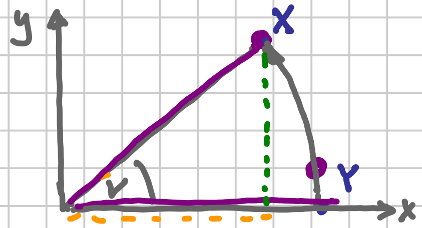


a) o.E. Kreis um $M=(a,0,0)$ in xy-Ebene mit Radius r (Meridian).

$\vec{y}(u) = \qquad , \; u \in [-\pi,\pi[$

Drehung um z-Achse mit Winkel v

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}\cos v & -\sin v & 0\\ \sin v & \cos v & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\vec{y} \Rightarrow$$



$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix}\cos v & -\sin v & 0\\ \sin v & \cos v & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad , \; \begin{matrix}u\in[-\pi,\pi[\\ v\in[-\pi,\pi[\end{matrix}$$

$G = \{(u,v) \mid -\pi \le u < \pi, -\pi \le v < \pi\}$ Parameterlinien:

u-Linien ($v=v_0=$const): $\vec{x}(u,v_0) = \begin{pmatrix}(a+r\cos u)\cos v_0\\ (a+r\cos u)\sin v_0\\ r\sin u\end{pmatrix}$

mit Winkel v_0 um z-Achse gedrehter Meridiankreis

v-Linien ($u=u_0=$const): $\vec{x}(u_0,v) = \begin{pmatrix}(a+r\cos u_0)\cos v\\ (a+r\cos u_0)\sin v\\ r\sin u_0\end{pmatrix}$

Kreis in Ebene $z=r\sin u_0$ um z-Achse mit Radius $a+r\cos u_0$

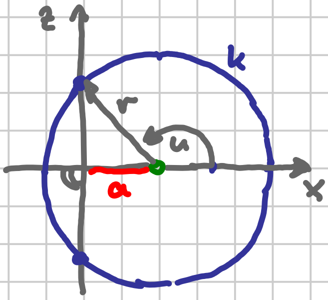
b) $\vec{x}_u = \qquad , \quad \vec{x}_v$

Tgte an u-Linie $\quad$ Tgte an v-Linie durch $\vec{x}(u,v)$.

$\vec{x}(u,v)$ regulär $\Leftrightarrow$ $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ linear unabhängig
$\Leftrightarrow \vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{x}_u \times \vec{x}_v)^2 \neq 0$

$\vec{x}_u \times \vec{x}_v =$ $\neq \vec{0} \Leftrightarrow$ $\forall u$

gilt stets falls $\underline{a > r}$ $\neq 0$ da für $\sin u = 0 \Rightarrow \underbrace{\cos u}_{\in[-1,1]} = \pm 1$

c) 

Für $a < r$ schneidet k die z-Achse in 2 Punkten mit $\cos u = -\frac{a}{r}$ (vgl. reguläre Stellen) die bei Drehung um z-Achse liegen bleiben, d.h. Doppelpunkte (und singuläre Pkt) von c sind.

Alle anderen Pkte sind für $G = [-\pi, \pi) \times [-\pi, \pi)$ einfach.

d) $g_{11} = \vec{x}_u^{\,2} =$, $g_{12} = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v =$, $g_{22} = \vec{x}_v^{\,2} =$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow g = \det(g_{ij}) = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = (\vec{x}_u \times \vec{x}_v)^2 =$ $\neq 0$ für $a > r$

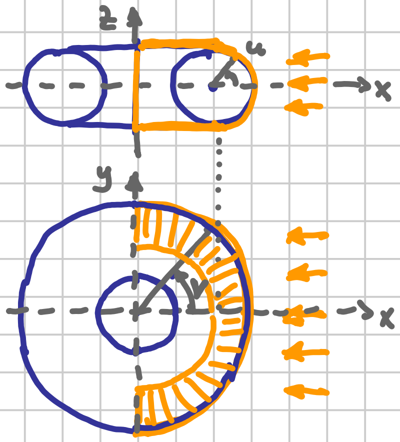
$A(\phi) = \iint_{\mathcal{U}} |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| \, du\, dv = \iint_{\mathcal{U}} \sqrt{\det(g_{ij})} \, du\, dv = \underbrace{\qquad}_{>0}$

$= \int \int$

beachte $a > r$

(Oberfläche des „Apfeltorus" mit Grenzen von u von $-\arccos(-\frac{a}{r})$ bis $\arccos(-\frac{a}{r})$.)

Bei Beleuchtung parallel zur x-Achse wird nur der Teil von ϕ mit $(u,v) \in \underbrace{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}_{u} \times \underbrace{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}_{v}$ beleuchtet.



$\Rightarrow A(\bar{\phi}) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r(a + r\cos u) \, dv\, du =$

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \pi r (a + r\cos u) \, du =$

$= \pi r \cdot (au + r\sin u) \Big|_{u=-\pi/2}^{\pi/2} =$

$= \pi r \cdot (a\pi + 2r) =$

$= \underline{\underline{r a \pi^2 + 2 r^2 \pi}}$