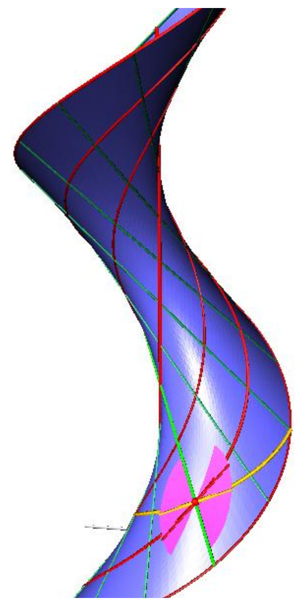
Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Dr. H. Vogel

WS 2020/21
Blatt 12

Geometrie für das Lehramt an beruflichen Schulen

Tutoraufgaben:

T28. Durch die Parameterdarstellung $\Phi \subset \mathbb{R}^3 : \ \vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ v-u \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$ ist eine C^∞−Fläche im Raum gegeben.



a) Beschreiben Sie die Gestalt von Φ anhand ihrer Parameterlinien .

b) Zeigen Sie, dass Φ regulär ist, und bestimmen Sie den Normaleneinheitsvektor von Φ.

c) Bestimmen Sie die erste Fundamentalform von Φ.

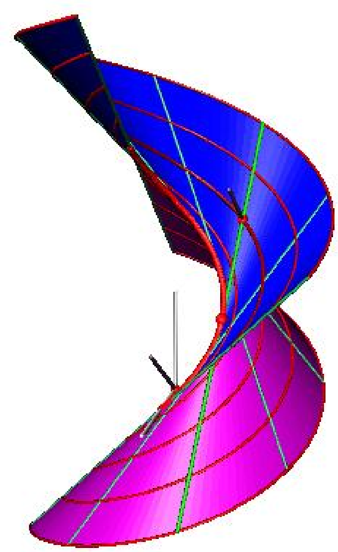
d) Welche v−Linie $x(u_0, v)$ schneidet alle u−Linien $x(u, v_0)$ unter 135 ?

e) Bestimmen Sie eine Flächenkurve von Φ, welche die u−Linien von Φ orthogonal schneidet.

f) Zeigen Sie, dass Φ über dem Parametergebiet $U \ =]0,2[\times]0,\pi[$ einfach ist und geben Sie den Flächeninhalt des zugehörigen Flächenstücks an.

T29. Die Tangenten einer regulären Raumkurve $c : \ \vec{y}(s)\,,\ s \in I \subset \mathbb{R}$ (s Bogenlänge) ohne W−Punkte bilden im $\mathbb{R}^3$ die ***Tangentenfläche*** von c

$$\Phi \ : \ \vec{x}(s,t) \ := \ \vec{y}(s) + t \cdot \vec{y}\,'(s)\,,\ s \in I\,,\ t \in J \subset \mathbb{R}.$$



a) Für welche offenen Intervalle $J \subset \mathbb{R}$ ist Φ regulär ?

b) Beschreiben Sie die Parameterlinien von Φ.

c) Zeigen Sie, dass die Tangentenebenen von Φ für $t \neq 0$ längs jeder Erzeugenden von Φ ($s = s_0 = const.$) zusammenfallen.

d) Berechnen Sie die metrischen Fundamentalgrößen von Φ.

e) Zeigen Sie, dass Φ in die Ebene abwickelbar ist, d.h. dass Φ lokal isometrisch zu einer ebenen Fläche $\widetilde{\Phi} \subset \mathbb{R}^2$ ist.

Hausaufgaben:

H27. Durch die Parameterdarstellung

$$\Phi \subset \mathbb{R}^3 : \ \vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} (u^2+4)\cos v \\ (u^2+4)\sin v \\ 4u \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi[$$

ist eine $C^\infty-$Fläche im Raum gegeben.

a) Beschreiben Sie die Parameterlinien und die Gestalt von Φ.

b) Zeigen Sie, dass die Fläche Φ regulär und einfach ist.

c) Bestimmen Sie die metrischen Fundamentalgrößen g_{ij} von Φ.

d) Berechnen Sie die Oberfläche des Flächenrings auf Φ, der zwischen den beiden Ebenen $z = \pm 8$ liegt.

e) Berechnen Sie den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}(u,v)$ von Φ in $\vec{x}(u,v)$.

Im Folgenden sei durch die Parameterdarstellung

$$\Phi^* \subset \mathbb{R}^3 : \ \vec{x}^*(u,v) = \begin{pmatrix} f(u) \\ v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi[$$

mit $f(u) = 2 \operatorname{arsinh} \dfrac{u}{2} \in C^\infty$ eine weitere Fläche Φ^* (in der $xy-$Ebene) gegeben.

f) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\alpha : \ \Phi \to \Phi^* , \ \vec{x}(u,v) \mapsto \vec{x}^*(u,v)$$

lokal winkeltreu (konform) ist.

H28. Über dem Gebiet $G := \{(u,v) \mid -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, \ -\pi < v < \pi\} \subset \mathbb{R}^2$ sind drei Flächen $\Phi, \overline{\Phi}$ und Φ^* durch folgende Parameterdarstellungen gegeben:

$$\Phi : \ \vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}, \ \overline{\Phi} : \ \vec{\overline{x}}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}, \ \Phi^*, \ \vec{x}^*(u,v) = \begin{pmatrix} v \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

Die Abbildungen $\alpha : \ \Phi \to \overline{\Phi}, \ \vec{x}(u,v) \mapsto \vec{\overline{x}}(u,v)$ und $\beta : \ \Phi \to \Phi^*, \ \vec{x}(u,v) \mapsto \vec{x}^*(u,v)$ sind flächentreu.

Welche Eigenschaften hat die Abbildung $\gamma : \ \overline{\Phi} \to \Phi^*, \ \vec{\overline{x}}(u,v) \mapsto \vec{x}^*(u,v)$.