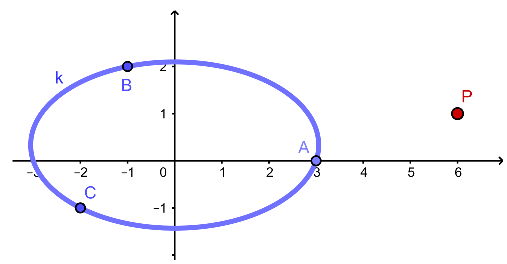
Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Dr. H. Vogel

WS 2021/22
Blatt 8

Geometrie für das Lehramt an beruflichen Schulen

Tutoraufgaben:

T20. In affinen xy-Koordinaten sei ein Kegelschnitt k gegeben durch: $k:\ x^2+3y^2-2y=9$, sowie die Punkte $A(3,0),\ B(-1,2),\ C(-2,-1)$ auf k und der Punkt $P(6,1)$.



a) Bestimmen Sie (mithilfe der homogenen Gleichung von k) die Polare h von P bzgl. k sowie die Schnittpunkte $\{D,\ E\} = h \cap k$.

b) Welche Eigenschaften haben die Verbindungsgeraden $f = PD$ und $g = PE$?

c) Wie kann man mithilfe der Polaren h von P bzgl. k feststellen, welcher der Punkte $A,\ B,\ C$ von P aus gesehen werden kann (Eigenschatten)?

T21. Sei $\vec{s} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{o}\}$ und S die schiefsymmetrische Matrix mit $S\vec{x} = \vec{s} \times \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

a) Man zeige, dass die Matrix $E - S$ regulär ist.

b) Man zeige, dass die Matrix $U := (E-S)^{-1}(E+S)$ eine Drehmatrix ist.

c) Für $U \neq E$ bestimme man die Drehachse und den Drehwinkel der zu U gehörigen Drehung.

Hausaufgaben:

H18. Bekanntlich hat in der euklidischen Ebene die Hyperbel $h : xy = \frac{1}{2}$ die Asymptoten $x = 0$ und $y = 0$.

a) Geben Sie die Gleichung von h in homogenen Koordinaten an und betrachten Sie nun h als Kegelschnitt in der projektiv erweiterten euklidischen Ebene.

b) Ermitteln Sie die Schnittpunkte H_1, H_2 von h mit der Ferngeraden.

c) Ermitteln Sie jeweils eine Gleichung der Tangente g_1, g_2 von h in jedem der beiden Punkte H_1, H_2.

d) Vergleichen Sie g_1, g_2 mit den beiden Asymptoten.

H19. Seien A, B, C drei Punkte des Anschauungsraumes, die nicht auf einer Geraden liegen, und k eine reelle Zahl. Seien X, Y, Z diejenigen Punkte, für die gilt:

$$\overrightarrow{AX} = k \cdot \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BY} = k \cdot \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CZ} = k \cdot \overrightarrow{CA}.$$

Man zeige: Für die Flächen F_1 des Dreiecks ABC und F_2 des Dreiecks XYZ gilt:

$$F_2 = (3k^2 - 3k + 1) \cdot F_1.$$

Hinweis:Betrachte das Dreieck im $\mathbb{R}^3$.

H20. Durch die 3×3–Matrix $U = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ sei eine affine Abbildung $\vec{x}\,' = U\vec{x}$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung eine Drehung des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimmen Sie die Drehachse und den Drehwinkel (bis auf Orientierung).