Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert
Lena Polke, Michael Strobel

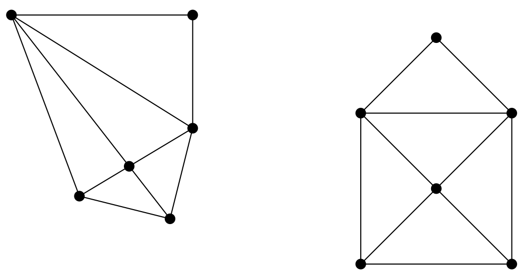
Geometriekalküle WS 2019/20
https://geo.ma.tum.de/de/lehre/geometriekalkuele.html
Aufgabenblatt 2 (2019–11–04)

Level 0

Aufgabe 1. Grundlagen.

(a) Gegeben eine Punkt P und eine Gerade g im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. Wie bestimmt man die Parallele zu g durch P?

(b) Betrachten Sie die unten stehende Abbildung. Ist die linke Punkt-Geraden-Konfiguration das Bild der rechten unter einer projektiven Transformation?



(c) Gegeben seien ein Punkt Z und eine Gerade l im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, die nicht inzident sind. Ist dann die Abbildung

$$P \mapsto l \times (Z \times P)$$

eine projektive Transformation des $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$?

(d) Überlegen Sie sich, wie man allgemein die Fixpunkte und Fixgeraden von projektiven Transformationen bestimmt. Beachten Sie dabei, dass Vielfache eines homogenen Koordinatenvektors dasselbe Objekt beschreiben.

(e) Was ist der Unterschied zwischen einer Fixgerade und einer Fixpunktgerade einer projektiven Transformation? Finden Sie Beispiele für beides.

Level 1

Aufgabe 2. Determinanten.

a) Beweisen Sie folgende Gleichung:

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Abgekürzt werden wir dies auch schreiben als $\det(a, b, c) = \langle a \times b, c\rangle$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

b) Benutzen Sie dieses Ergebnis, um folgenden Satz zu beweisen:
Drei Punkte a, b, c liegen genau dann auf einer Geraden, wenn ihre homogenen Koordinaten die Gleichung $\det(a, b, c) = 0$ erfüllen.

c) Formulieren Sie einen entsprechenden Satz, der eine Aussage über drei Geraden macht, deren Determinante verschwindet.

Aufgabe 3. Fixgeraden und -punkte

a) Gegeben sei folgende affine Abbildung in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Fixpunkte und Fixgeraden dieser Abbildung in $\mathbb{R}^2$.

Hinweis: Betrachten Sie zuerst mögliche Fixgeraden durch den Ursprung, danach andere.

b) Ein Repräsentant der entsprechenden projektiven Transformation lautet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 15 & 12 & 0 \\ 3 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

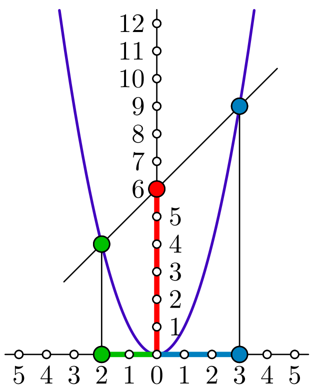
Bestimmen Sie die Fixpunkte dieser Abbildung in $\mathbb{RP}^2$. Gehen Sie dazu von der Matrix aus, nicht von der Lösung der vorherigen Teilaufgabe.

c) Bestimmen Sie die Fixpunkte der folgenden Abbildung in $\mathbb{RP}^2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. Parabelrechner.

In der Mathematikausstellung ix-quadrat findet sich das rechts abgebildete Exponat. Die Kurve ist eine gewöhnliche Standardparabel mit der Gleichung $y = x^2$.
Will man zwei Zahlen a und b miteinander multiplizieren, so verbindet man die Punkte der Normalparabel bei $x = -a$ und $x = b$ miteinander. Schneidet man diese Gerade mit der y-Achse, so landet man genau im Punkt $(0, a \cdot b)^T$.
Beweisen Sie diese Eingenschaft mit Hilfe von homogenen Koordinaten und dem Kreuzprodukt.



Aufgabe 5. Matrizen euklidischer Abbildungen.

Bestimmen Sie Matrizen aus $\mathbb{R}^{3\times 3}$, die die folgenden Transformationen auf homogenen Koordinaten beschreiben.

a) Eine Spiegelung an der Geraden $x = 3$.

b) Eine Drehung um 180° um den Ursprung.

c) Eine Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn um den Punkt $(4, 7)^T$.

d) Eine Drehung um den Ursprung, die den Punkt $(9, 12)^T$ auf die x-Achse abbildet.

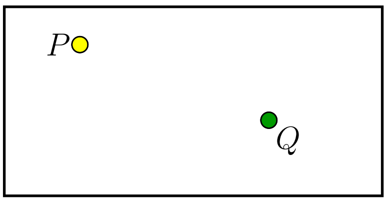
e) Eine Spiegelung an der Geraden durch die Punkte $(2, -4)^T$ und $(-6, 2)^T$.

Hinweis: Alle Matrizen sind mit ganzen Zahlen als Einträgen darstellbar. Die Verwendung von mit dem Taschenrechner berechneten Dezimalbrüchen kann vermieden werden. Die Zahlen sind so gewählt, dass sich die Matrizen auch ohne Taschenrechner bestimmen lassen.

Level 2

Aufgabe 6. Billard.

Auf einem rechteckigen Billard-Tisch liegen zwei Kugeln. Eine von diesen soll so angespielt werden, dass sie die andere trifft.



a) Zeichnen Sie in die obige Abbildung (oder noch besser eine Kopie auf eigenem Karopapier) die Bahn ein, auf der die Kugel P zuerst die obere Bande, dann die rechte Bande und schließlich die Kugel Q trifft. Sie können davon ausgehen, dass die Kugeln punktförmig sind und an den Banden einfach reflektiert werden, ohne Dralleffekte oder dergleichen.

b) Jetzt werden die Banden durch Teleporter ersetzt, die gegenüberliegende Kanten so identifizieren, dass die Topologie eines Torus entsteht. Zeichnen Sie eine Bahn ein, bei der die Kugel P zweimal die lange und einmal die kurze Kante kreuzt, bevor sie auf die Kugel Q trifft.

c) Eine Umpolung einzelner Teleporter identifiziert gegenüberliegende Kanten so, dass die Topologie der reellen projektiven Ebene entsteht. Finden Sie auch hier einen Bahnverlauf, der zweimal die lange und einmal die kurze Kante kreuzt.