4.2 Quadriken und Polarität

4.2.1 Quadriken im P^n, $n = 2, 3$

Im affinen xy-KS des $\mathbb{E}^2$ ist der Kreis k um $M(1,2)$ mit Radius $r = 3$ nach Pythagoras bestimmt durch:

$k: \ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$

$\Leftrightarrow k: \ x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 9$

$\Leftrightarrow k: \ x^2 - 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$ **(a)**

Alle Punkte $\in \mathbb{E}^2$, deren aff. Koord. **(a)** erfüllen, liegen auf k.

Übergang zu homogenen Koordinaten mit Transformation: $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$ liefert

$k: \ (\frac{x_1}{x_0})^2 - 2\frac{x_1}{x_0} + (\frac{x_2}{x_0})^2 - 4\frac{x_2}{x_0} - 4 = 0 | \cdot (-x_0^2)$

$\Leftrightarrow k: \ 4x_0^2 - x_1^2 + 2x_1x_0 - x_2^2 + 4x_2x_0 = 0$

$$\Leftrightarrow k: (x_0, x_1, x_2) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Ausmultiplizieren des Matrizenprodukts liefert die darüberstehende Gleichung. Beachte: A kann symmetrisch gewählt werden ($A^T = A$), da z.B. $2x_0x_2 + 2x_2x_0 = 4x_0x_2$.

$\Leftrightarrow k: \vec{x}^T A \vec{x} = 0$ **(h)** mit $A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

eine Gleichung von $k \subset P^2$ in homogenen Koordinaten (bis auf einen Faktor $\neq 0$).

Alle Punkte $\in P^2$, deren homog. Koord. $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{o}\}$ die Gleichung **(h)** erfüllen, liegen auf k.

Figur-4-2-1-Quadrik-2D k(M(1,2),r=3).

Definition: In P^2 ist $k: \ \vec{x}^T A \vec{x} = 0$ **(*)**

mit $A := \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = A^T \neq O$

die Gleichung einer **Kurve zweiter Ordnung** (eines **Kegelschnitts**, einer **Quadrik**) in homogenen Koord. $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{o}\}$.

Beachte: A o.E. symmetrisch, da Lösungen $\vec{x}$ von $\vec{x}^T B \vec{x} = 0$

mit 3×3-Matrix B auch $0^T = (\vec{x}^T B \vec{x})^T = \vec{x}^T B^T \vec{x} = 0$ erfüllen

(vgl. Matrizenprodukt $(U \cdot V)^T = V^T \cdot U^T$),

also auch $\vec{x}^T (B + B^T) \vec{x} = \vec{x}^T A \vec{x} = 0$ mit $A := B + B^T = A^T$

$$0 = \vec{x}^T A \vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_0, x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 \\ a_{01}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{02}x_0 + a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} = \quad & a_{00}x_0^2 + a_{01}x_0x_1 + a_{02}x_0x_2 \\ & + a_{01}x_1x_0 + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 \\ & + a_{02}x_2x_0 + a_{12}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 \\ = \quad & a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 \\ & + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \end{aligned}$$

Wahl von $x_0 = 0$ als Ferngerade,

Division durch x_0^2 und Setzen von $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$ liefert

$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$

die Gleichung des Kegelschnitts im xy-KS.

Definition: In P^3 ist $Q: \ \vec{x}^T A\vec{x} = 0$ **(*)**

mit $A := \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = A^T \neq O$

die Gleichung einer **Fläche zweiter Ordnung** (einer **Quadrik**) in homogenen Koordinaten $\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{\vec{o}\}$.

Ist $\det A \neq 0$, so heißt die Quadrik/der Kegelschnitt **nichtentartet**, sonst **entartet**. Ist $\det A = 0$, so gibt es Punkte $S(\vec{s}) \in Q/k$ mit $A\vec{s} = \vec{o}$ und $\vec{s} \neq \vec{o}$. Diese nennt man **singuläre Punte von** Q/k.
Punkte $P(\vec{p}) \in Q/k, A\vec{p} \neq \vec{o}$ heißen **regulär**.

Satz: Ist $S(\vec{s})$ ein singulärer Punkt und $P(\vec{p})$ ein weiterer Punkt von Q/k, so liegt die Gerade SP auf Q/k.

Beweis: Für $X(\vec{x} = u\vec{s} + v\vec{p}) \in SP$ gilt
$\vec{x}^T A\vec{x} = (u\vec{s} + v\vec{p})^T A(u\vec{s} + v\vec{p}) =$
$u^2\vec{s}^T A\vec{s} + uv\vec{s}^T A\vec{p} + vu\vec{p}^T A\vec{s} + v^2\vec{p}^T A\vec{p} = 0.$
Beachte: $0 = (\vec{p}^T A\vec{s})^T = \vec{s}^T A^T\vec{p} = \vec{s}^T A\vec{p}$ wegen $A^T = A$.

Satz: Für jede Quadrik lässt sich durch eine Projektivität erreichen, dass ihre Gleichung in **Normalform** (**NF**) vorliegt:

$$x_0^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots x_r^2 = 0.$$

Dabei ist $2p \geq r$.

Beweis mit **quadratischer Ergänzung** am **Beispiel**,
vgl. Figur-4-2-1-Quadrik-2D (Beispiel)

$\mathbf{Q}: x_0^2 - 2x_0x_1 + 6x_0x_2 + 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 = 0$

Wir klammern $2x_0$ aus allen gemischten Produkten aus, in denen x_0 vorkommt:

$x_0^2 + 2x_0(-x_1 + 3x_2) + 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 = 0$

Wir ergänzen die ersten zwei Summanden nach einer binomischen Formel zu einem vollständigen Quadrat und ziehen die Ergänzung wieder ab:

$$x_0^2 + 2x_0(-x_1 + 3x_2) + (-x_1 + 3x_2)^2 \\ - (-x_1 + 3x_2)^2 + 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 = 0$$

Wir fassen das vollständige Qudrat zusammen, multiplizieren den Rest aus und sortieren:

$(x_0 - x_1 + 3x_2)^2 + 4x_1^2 + 8x_1x_2 - 5x_2^2 = 0$

Jetzt kommt x_0 nur noch in der ersten Klammer vor. Wir machen analog weiter mit x_1 und klammern den Faktor 4 vor den Termen mit x_1 aus:

$(x_0 - x_1 + 3x_2)^2 + 4(x_1^2 + 2x_1x_2) - 5x_2^2 = 0$

ergänzen in der Klammer zu einem Quadrat und ziehen die Ergänzung wieder ab:

$(x_0 - x_1 + 3x_2)^2 + 4(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2)$
$-4x_2^2 - 5x_2^2 = 0$ (Faktor beachten!) und erhalten
$(x_0 - x_1 + 3x_2)^2 + 4(x_1 + x_2)^2 - 9x_2^2 = 0$
Zum Schluss ziehen die Faktoren ($\neq \pm 1$) vor den Quadraten in die Quadrate hinein.

$$(x_0 - x_1 + 3x_2)^2 + (2x_1 + 2x_3)^2 - (3x_2)^2 = 0$$

Wir setzen:
$x'_0 := x_0 - x_1 + 3x_2$,
$x'_1 := 2x_1 + 2x_2$,
$x'_2 := 3x_2$, bzw. wählen die Projektivität

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{=:U} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Damit erhält man die neue Quadrikgleichung, die **Normalform** von

Q: $x_0'^2 + x_1'^2 - x_2'^2 = \vec{x}\,'^T A' \vec{x}\,' = 0$
mit $A' = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$

Wir haben es so eingerichtet, dass gilt:
Die Transformationsmatrix U in (*) ist eine obere Dreiecksmatrix
mit nicht verschwindenden Diagonalelementen, also mit $\det U \neq 0$.

Bem.: Einsetzen von $\vec{x}\,' = U\vec{x}$ in $\vec{x}\,'^T A' \vec{x}\,' = 0$ liefert wieder die Ausgangsgleichung von Q.

Geht das immer? Was ist mit

$$x_0 x_1 = 0$$

Quadratische Ergänzung nicht möglich!

Trick: $\left.\begin{array}{l} x_0 =: x_0' + x_1' \\ x_1 =: x_0' - x_1' \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 x_1 = x_0'^2 - x_1'^2$

Damit hat man Quadrate erhalten. Ggf. kann man jetzt quadratisch ergänzen.

Beispiel: Hyperbel im $\mathbb{E}^2$ bzw. im P^2:

Hyperbel im affinen xy-KS des $\mathbb{E}^2$:
$h: \ y = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y = 1$
Transformation $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$ liefert
$h: \ \frac{x_1}{x_0} \cdot \frac{x_2}{x_0} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_0^2 - x_1 x_2 = 0 \qquad (1)$
Setze $x_0 = x_0', x_1 = x_2' + x_1', x_2 = x_2' - x_1'$
$h: \ x_0'^2 + x_1'^2 - x_2'^2 = 0$ **Normalform** $(1')$
Setze in (1) $x_0 = x_1', x_1 = x_2', x_2 = x_0'$ und $x' = \frac{x_1'}{x_0'}$, $y' = \frac{x_2'}{x_0'}$ als Übergang zu affinen Koord., so folgt $h: \ y' = x'^2$ ist **Parabel** !
Setze in (1') $x_0' = x_1'', x_1' = x_2'', x_2' = x_0''$ und $x'' = \frac{x_1''}{x_0''}$, $y'' = \frac{x_2''}{x_0''}$ als Übergang zu affinen Koord., so folgt $h: \ x''^2 + y''^2 = 1$ ist **Kreis**!

Kreis, **Parabel** und **Hyperbel** sind projektiv ununterscheidbar/äquivalent.

Normalformen von **Kegelschnitten** in P^2

$k: \ \vec{x}^T D\vec{x} = 0$ mit 3×3-Diagonalmatrix D

nach Rg(D) (Anz. der Quadrate) und der Minuszeichen in D

Siehe: Figur 4-1-3-Quadrik-2D

Nichtentartete Kegelschnitte: 3 Quadrate

(1) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ ... (leere Menge)
nichtent. nullteiliger Kegelschnitt

nichtent., da $\det D \neq 0$; nullteilig, da **kein** Minuszeichen

(2) $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ ...
nichtent. einteiliger Kegelschnitt

nichtent., da $\det D \neq 0$; einteilig, da **ein** Minuszeichen

(Ellipse, Parabel, Hyperbel)

Nach Wahl der Ferngeraden $x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$ oder $x_0 = 0$,

vgl. Beispiel oder Figur 4-1-3-ProjektiväquivalenterKreis

Entartete Kegelschnitte: 1 oder 2 Quadrate

(1) $x_0^2 + x_1^2 = 0$ ... $(x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1) = 0$
nullteiliges konj. kompl. **Geradenpaar**,
reeller **Doppelpunkt** $(0, 0, 1)$

(2) $x_0^2 - x_1^2 = 0$ ... $(x_0 + x_1)(x_0 - x_1) = 0$
(einteiliges) schneidendes
bzw. **paralleles Geradenpaar**

$x_0 + x_1 = 0$, $x_0 - x_1 = 0$ mit Schnittpunkt $(0, 0, 1)$

(3) $x_0^2 = 0$ ... **Doppelgerade**

Ferngerade $x_0 = 0$ doppelt gezählt.

Quadrik-Normalformen im P^3:
$Q : \vec{x}^T D\vec{x} = 0$ mit 4×4-Diagonalmatrix D

nach Rg(D) (Anz. der Quadrate) und der Minuszeichen in D

Siehe: Figur 4-1-3-Quadrik-3D

Nichtentartete Quadriken: $\det D \neq 0$

(1) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \ \ldots (= \emptyset)$

nichtentartete nullteilige Quadrik

nichtentartet, weil die Anzahl der Quadrate 4 ist,

nullteilig, weil die Anzahl der Minuszeichen in D null ist.

Die nichtent. nullteilige Quadrik hat keine reelle Punkte.

(2) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \ \ldots$

(nichtent. 1-teil.) ovale Quadrik

(Kugel, Ellipsoid,
elliptisches Paraboloid,
zweischaliges Hyperboloid)

Nach Wahl der Ferngeraden $x_3 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$ oder $x_0 = 0$

(3) $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \ \ldots$

(nichtent. 2-teil.) ringartige Quadrik

(einschaliges Hyperboloid,
hyperbolisches Paraboloid)

Nach Wahl der Ferngeraden $x_3 = 0$ oder $x_1 + x_2 = 0$.

Entartete Quadriken: $\det D = 0$

(1) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ ...

nullteiliger Kegel, Doppelpunkt

$(0, 0, 0, 1)$ (singulärer Punkt).

(2) $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ ...

einteiliger Kegel

(Kegel bzw. elliptischer Zylinder,

parabolischer Zylinder,

hyperbolischer Zylinder)

Nach Wahl der Ferngeraden $x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$ oder $x_0 = 0$

(1/2) sind **Kegel mit punktförmiger Spitze** $(0, 0, 0, 1)$ (singulärer Punkt).

(3) $x_0^2 - x_1^2 = 0 \ldots (x_0 + x_1)(x_0 - x_1) = 0$

(reelles) **schneidendes Ebenenpaar**

$x_0 + x_1 = 0$, $x_0 - x_1 = 0$ mit Schnittgerade $x_0 = x_1 = 0$

(4) $x_0^2 + x_1^2 = 0 \ldots (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1) = 0$

nullteiliges konj. kompl. **Ebenenpaar,**

Doppelgerade $x_0 = x_1 = 0$

(3/4) sind **Quadriken mit einer Geraden** $x_0 = x_1 = 0$ von singulären Punkten.

(5) $x_0^2 = 0$ ... **Doppelebene**

Fernebene $x_0 = 0$ doppelt gezählt.

4.2.2 Polarität bezüglich eines Kegelschnitts oder bezüglich einer Quadrik

Ist **K**: $\vec{x}^T A\vec{x} = 0$ mit $A^T = A \neq O$, die Gleichung eines Kegelschnitts oder einer Quadrik des P^n $(n = 2, 3)$, so heißen zwei Punkte $X(\vec{x})$ und $Y(\vec{y})$ **zueinander polar bezüglich K**

$$:\Leftrightarrow \quad \vec{x}^T A\vec{y} = 0.$$

Warum darf man schreiben "zueinander" polar?
$0 = \vec{x}^{\,T} A\vec{y} = (\vec{x}^{\,T} A\vec{y})^T = \vec{y}^{\,T} A^T \vec{x} = \vec{y}^{\,T} A\vec{x}$
Matrizenprodukt: $(U \cdot V \cdot W)^T = W^T \cdot V^T \cdot U^T$ und $A^T = A$.
Beachte: $P(\vec{p}) \in$ **K** ist zu sich selbst polar.
Zu einem singulären Punkt $S(\vec{s})$ von **K**, d.h. $A\vec{s} = \vec{o}$ mit $\vec{s} \neq \vec{o}$, sind alle Punkte des P^n $(n = 2, 3)$ polar.

4.2.3 Polare und Polarebene

Ist $P(\vec{p})$ kein singulärer Punkt der Quadrik **K**: $\vec{x}^T A\vec{x} = 0 \subset P^n$ $(n = 2, 3)$ mit $A^T = A \neq O$, so ist die Menge aller zu P polaren Punkte gegeben durch die Gleichung

$$\vec{u}^{\,T}\vec{x} = 0 \;\text{ mit }\; \vec{u} := A\vec{p} \neq \vec{o},\ d.h.\ \vec{p}^{\,T} A\vec{x} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{im } P^2 \text{ eine Gerade, die } \textbf{Polare } g_P \\ \text{im } P^3 \text{ eine Ebene, die } \textbf{Polarebene } \varepsilon_P \end{array} \right\}$$

von P bezüglich K.

Eruiere mit Hilfe der Figur 4-2-3-Polare-2D Eigenschaften der Polarität an einem nichtentarteten nullteiligen Kegelschnitt. Siehe auch Figur-4-2-3-Polarebene-3D

Hauptsatz der Polarentheorie:
Ist $\vec{x}^T A \vec{x} = 0$ mit $A^T = A$ und $\det A \neq 0$ eine nichtentartete Quadrik **K**, dann gilt:

$Q \in$ Polare/Polarebene von P bzgl. **K** $\Leftrightarrow$
Q polar zu P bzgl. $\mathbf{K}$ $\Leftrightarrow$ P polar zu Q bzgl. $\mathbf{K}$
$\Leftrightarrow P \in$ Polare/Polarebene von Q bzgl. **K**
Weiter gilt:
Jeder Geraden/Ebene mit der Gleichung $\vec{u}^T \vec{x} = 0$ ist genau ein **Pol** $P(\vec{p})$ mit homogenen Koordinaten $\vec{p} = A^{-1}\vec{u}$ zugeordnet.

Offenbar ist im P^2 die **Polare** eines regulären Punktes P eines Kegelschnitts k bezüglich k die **Tangente** von k in P.

Beweis: Es gilt: Die Polare zu $P(\vec{p}) \in k$ trifft k in einem weiteren Punkt $Q(\vec{q}) \in k$
$\Rightarrow\ PQ \subset k$, denn $(u\vec{p} + v\vec{q})^T A(u\vec{p} + v\vec{q}) =$
$u^2 \underbrace{\vec{p}^T A \vec{p}}_{=0,\, P \in k} + 2uv \underbrace{\vec{p}^T A \vec{q}}_{=0} + v^2 \underbrace{\vec{q}^T A \vec{q}}_{=0,\, Q \in k} = 0\, \forall u, v.$

4.2.4 Polarebene als Tangentenebene einer ovalen Quadrik

Beh.: Ist Q eine ovale Quadrik und ist $P(\vec{p}) \in Q$ und ε_P die Polarebene von P bzgl. Q, so ist $\varepsilon_P \cap Q = \{P\}$, also ε_P die Tangentenebene von Q in P.

Siehe Figur-4-2-4-Tangentenebene-3D

Bew.: Wir verwenden die NF von:

$$Q : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \qquad (1)$$

$$\Gamma_P : p_0 x_0 + p_1 x_1 + p_2 x_2 - p_3 x_3 = 0 \qquad (2)$$

mit $P(\vec{p}) \in Q \Leftrightarrow p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 = 0$ (3)

Aus (3) folgt: $p_3 \neq 0$.
(Für $p_3 = 0$ folgt aus (3) $p_0 = p_1 = p_2 = 0$, d.h. Widerspruch)
Aus (2), (3):

$$x_3 = \frac{1}{p_3}(p_0 x_0 + p_1 x_1 + p_2 x_2) = \pm \frac{p_0 x_0 + p_1 x_1 + p_2 x_2}{\sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2}}$$

Einsetzen in (1):

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = \frac{(p_0 x_0 + p_1 x_1 + p_2 x_2)^2}{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2}$$

$$1 = \frac{(p_0 x_0 + p_1 x_1 + p_2 x_2)^2}{(p_0^2 + p_1^2 + p_2^2)(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)} = (\cos\varphi)^2$$

mit dem Winkel $\varphi = 0$ oder π zwischen den Vektoren $(x_0, x_1, x_2)^T$ und $(p_0, p_1, p_2)^T$,d.h. $(x_0, x_1, x_2)^T = \lambda(p_0, p_1, p_2)^T$ mit $\lambda \neq 0$. (Beachte $cos\varphi$ ist Skalarprodukt/Beträge.)

Mit (2), (3) folgt auch $x_3 = \lambda p_3$, also $X(\vec{x}) = P(\vec{p})$ ist einziger Schnittpunkt.

Allgemein ist im P^3 die **Polarebene** eines regulären Punktes P einer Quadrik Q bezüglich Q die **Tangentenebene von Q in** P.

Die Tangentenebene einer ovalen Quadrik in einem Quadrikpunkt enthält genau den einen Quadrikpunkt.

Die Tangentenebene einer ringartigen Quadrik Q in einem Quadrikpunkt P enthält von Q genau den Punkt P und die beiden erzeugenden Geraden von Q durch P.

4.2.5 Polarität als Realisierung des Dualitätsprinzips

Ist **K**: $\vec{x}^T A\vec{x} = 0$ mit $A^T = A, \det A \neq 0$, ein nichtentarteter Kegelschnitt oder eine nichtentartete Quadrik des P^n $(n = 2, 3)$, so ist die Polarität bezüglich **K**, also die bijektive Abbildung

$$\text{Pol} \;\leftrightarrow\; \text{Polare/Polarebene}$$

$$P(\vec{p}) \;\leftrightarrow\; \vec{u}^{\,T} A\vec{x} = 0 \text{ mit } \vec{u} = A\vec{p}$$

eine Realisierung des Dualitätsprinzips.

Beachte: $\det A \neq 0 \wedge \vec{p} \neq \vec{o} \Rightarrow (\vec{u} = A\vec{p} \neq \vec{o} \Leftrightarrow \vec{p} = A^{-1}\vec{u} \neq \vec{o})$.

Vgl. Figur 4-2-1-Polare-2D: $S \;\leftrightarrow\; s$.

Für $A = E$ erhält man die Dualität $\vec{x}^T\vec{y} = 0$ aus 4.1.1. bzw. 4.1.2.