Geometrie LB Übungen Blatt 6

Notiztitel 08.11.2014

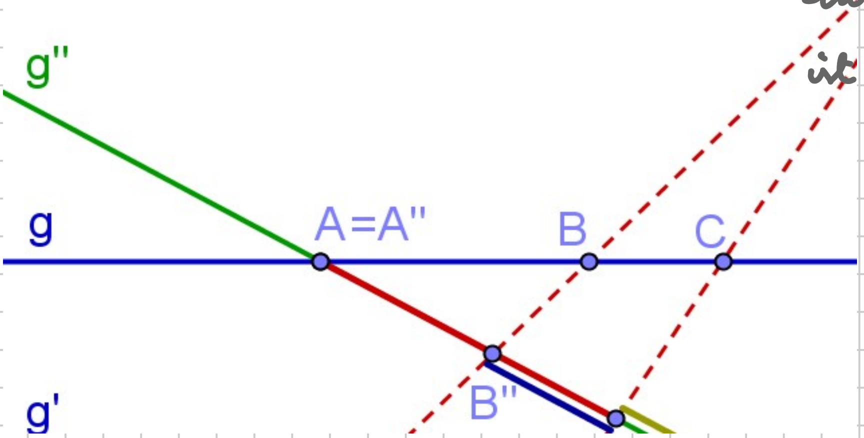
T14: **Konstruktive DV-Übertragung** (vgl. GeoGebra-Figuren zu T14)

Gegeben: 4 verschiedene Punkte $A, B, C, D \in g$ Gerade und 3 verschiedene Punkte $A', B', C' \in g'$ Gerade

Gesucht: $D' \in g'$ so, dass $DV(A', B', C', D') = DV(A, B, C, D)$

$DV(A,B,C,D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \varepsilon$ mit $\varepsilon = \pm 1$ A, B trennt C, D oder nicht

$D \to$ Fernpunkt $\Rightarrow DV \to TV(A,B,C) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$



Zentralprojektion ist DV-treu!

Konstruktionsbeschreibung

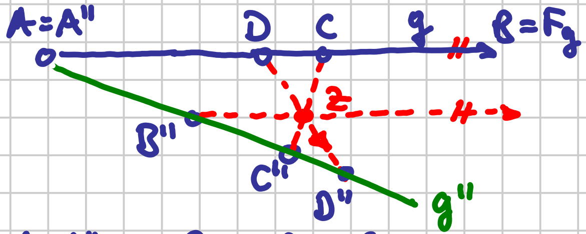
1)

2)

3)

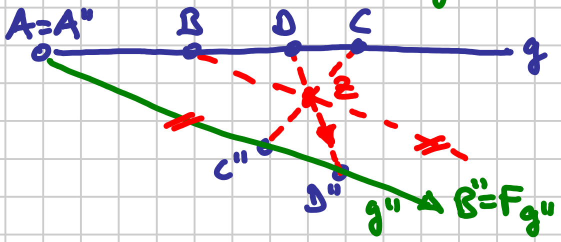
Diese Konstruktion ist in der projektiv abgeschlossenen euklidischen Ebene allgemeingültig. Wir betrachten einige Sonderfälle

1) $A \neq F_g$ (Fernpunkt von g)



1.1) $B = F_g$ (oder $C = F_g$)

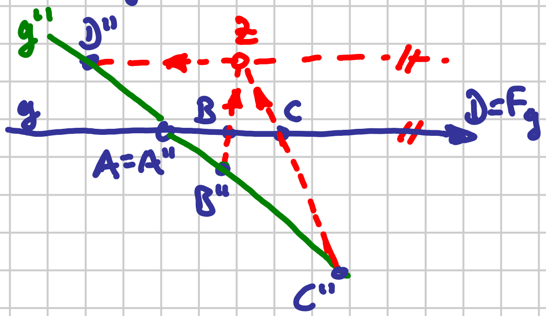
$\Rightarrow CC'' \,\#\, g \Rightarrow Z = B''B \cap C''C \ldots$ kein Fernpkt



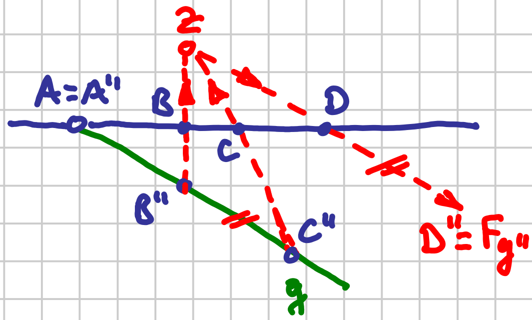
1.2) $B'' = F_{g''}$ (oder $C'' = F_{g''}$)

$\Rightarrow CC'' \,\#\, g'' \Rightarrow Z = B''B \cap C''C \ldots$ kein Fernpkt

1.3) $D = F_g$, Z kein Fernpkt

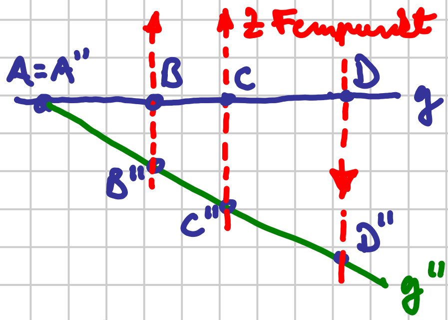


1.4) Z kein Fernpkt, $D'' = F_{g''}$



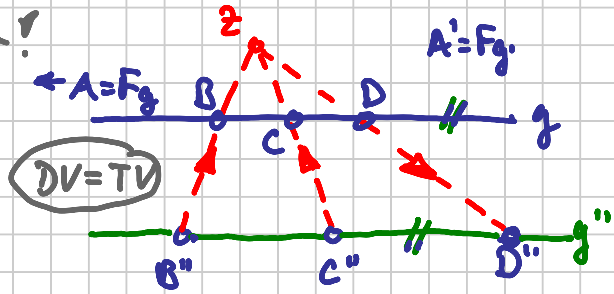
1.5) Ist Z ein Fernpunkt, dann ist κ_Z eine Parallelprojektion (DV-Übertrag $\hat{=}$ zentr. Streck. aus A)

Ist $D = F_g \Rightarrow D'' = F_{g''} \Rightarrow D' = F_{g'}$



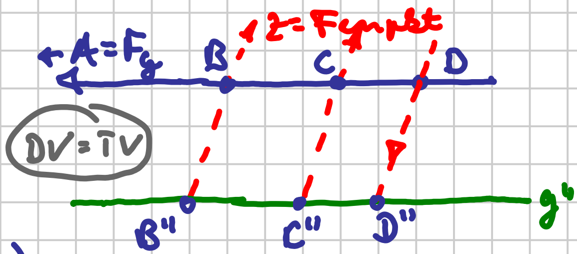
2) Ist $A = F_g$, so übertrage $DV(B, A, D, C) = DV(A, B, C, D)$ mit g'' durch $B = B''$ wie oben!

oder: wenn auch $A' = F_{g'}$ wähle B'' beliebig auf $g'' \parallel g$



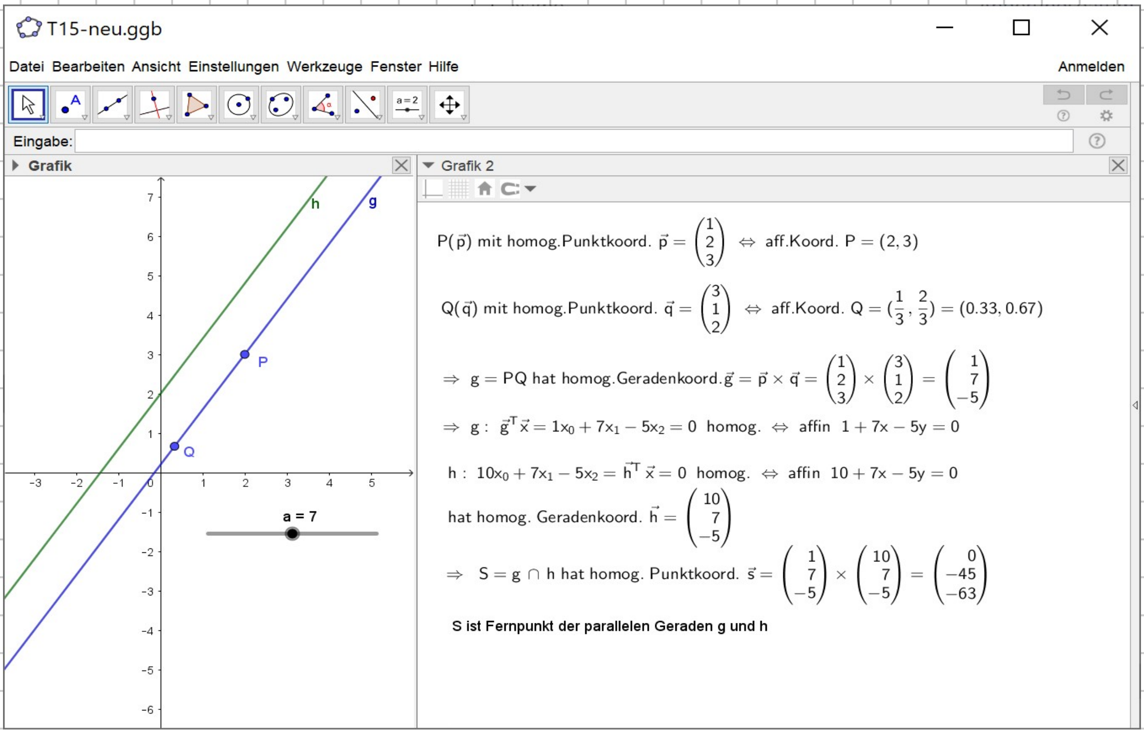
2.1) Z eigentlich $\Rightarrow \kappa_Z$ ist eine zentrische Streckung aus Z

2.2) Z ist Fernpunkt $\neq F_g \Rightarrow \kappa_Z$ ist Parallelprojektion (DV-Übertrag durch Parallelogramm)



T15) a) Verbindungsgerade in $\mathbb{P}^2$: (Kreuzprodukt)

b) Schnittpunkt in $\mathbb{P}^2$: (Kreuzprodukt)



T16: <u>gegeben:</u> Ebene ε : $\vec{u}^T \vec{x} = 0$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$
Nullvektor

Punkt $Z(\vec{z}) \notin \varepsilon$, d.h. $\vec{u}^T \vec{z} \neq 0$.

<u>gesucht:</u> Bildpunkt $Y(\vec{y})$ zu $X(\vec{x}) \in P^3 \setminus \{Z\}$ bei Zentralprojektion aus Z auf ε, d.h. der Schnittpunkt $Y(\vec{y}) = ZX \wedge \varepsilon$.

Alle Multiplikationen im 2. Summanden kann man als Matrixmultiplikationen interpretieren, d.h. mit dem Assoziativgesetz gilt: $\vec{z}\cdot(\vec{u}^T\cdot\vec{x}) = (\vec{z}\cdot\vec{u}^T)\cdot\vec{x}$

(n=4)

$$\underbrace{(n,1)\text{-Matrix} \cdot (1,n)\text{-Matrix}}_{(n,n)\text{-Matrix}} \cdot (n,1)\text{-Matrix} = (n,1)\text{-Matrix}$$

$$(n,1)\text{-Matrix} \cdot \overbrace{(1,n)\text{-Matrix} \cdot (n,1)\text{-Matrix}}^{(1,1)\text{-Matrix}}$$

Mit Einheitsmatrix E gilt: $\vec{x} = E\cdot\vec{x}$.

b)

Matrixprod. wie oben

$\Rightarrow Z$ hat kein Bild ?, vgl. $X \in P^3 \setminus \{Z\}$ in a)

c)

Für $X \in \varepsilon$: $= 0$ $\quad \neq 0$ da $Z \notin \varepsilon$.

$\Rightarrow$ Bild von $X \in \varepsilon$ ist X, d.h. ε ist eine Fixpunktebene