Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert
Lena Polke, Michael Strobel

Geometriekalküle WS 2019/20
https://geo.ma.tum.de/de/lehre/geometriekalkuele.html
Aufgabenblatt 6 (2020–01–13)

Level 0

Aufgabe 1. Grundlagen.

(a) Sei Q ein nicht-degenerierter Kegelschnitt gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass Q genau dann eine Parabel ist, wenn $ac - b^2 = 0$.

(b) Warum kann man die Punkte `I` und `J` nicht dehomogenisieren?

(c) Für vier kollineare, endliche Punkte im $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ ist ihr Doppelverhältnis gleich dem Doppelverhältnis der entsprechenden endlichen Punkte im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. Warum?

(d) Gegeben sei eine projektive Transformation T im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, die entweder eine

- Drehung um den Ursprung,
- eine Scherung parallel zur x-Achse oder
- das Strecken in x-Richtung um 5 und in y-Richtung um 3

darstellt. In welchen dieser Fälle lässt T Winkel invariant? Geben Sie jeweils sowohl ein (einfaches,) anschauliches, geometrisches Argument als auch ein formales, algebraisches.

Level 1

Aufgabe 2. Kreis als Kegelschnitt, der `I` und `J` enthält.

Ein Kreis in der projektiven Ebene ist gegeben durch

$$C = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{RP}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 + \alpha xz + \beta yz + \gamma z^2 = 0 \right\} \qquad \text{für geeignete } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

a) Warum (oder wann) ist dies ein Kreis? Wie lautet sein Mittelpunkt?

b) Zeigen Sie, dass die Kreise mit obiger Kreisgleichung die Punkte $\mathtt{I} = (-i, 1, 0)^T$ und $\mathtt{J} = (i, 1, 0)^T$ enthalten.

c) Geben Sie die Matrix $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, die diesen Kreis beschreibt.

d) Zeigen Sie, dass man den Mittelpunkt des Kreises wie folgt ausrechnen kann: $M = (Q \cdot \mathtt{I}) \times (Q \cdot \mathtt{J})$

e) Gibt es Quadriken, die `I` und `J` enthalten, aber nicht durch eine Gleichung in der oben angegebenen Form beschrieben werden können?

Aufgabe 3. Laguerres Formel.

Zeigen Sie mit Hilfe von Laguerres Formel folgende Aussagen:

a) Für die Winkelsumme im Dreieck gilt:
$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \pmod{\pi}$$

b) Gegenüberliegende Winkel eines Parallelogramms sind (modulo π) gleich groß.

c) Begründen Sie, warum sich mit Laguerres Formel Winkel nur Modulo π bestimmen lassen.

Aufgabe 4. Euklidischer Abstand.

Üblicherweise bestimmt man die Entfernung $\|x-y\|$ zweier Punkte $x=(x_1,x_2)^T, y=(y_1,y_2)^T \in \mathbb{R}^2$ über den Satz von Pythagoras. Es gilt nämlich

$$\|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}.$$

Im Folgenden soll eine projektive Invariante hergeleitet werden, die den euklidischen Abstand bezüglich der Standardeinbettung in $\mathbb{RP}^2$ wiedergibt. Lösen Sie dafür die folgenden Teilaufgaben:

a) Zeigen Sie, dass $\|x-y\| = \sqrt{[X,Y,\mathtt{I}][X,Y,\mathtt{J}]}$ ist, wenn $X=(x_1,x_2,1)^T$ und $Y=(y_1,y_2,1)^T$.

b) Zeigen Sie, dass $\sqrt{[X,Y,\mathtt{I}][X,Y,\mathtt{J}]}$ keine projektive Invariante ist.

c) Begründen Sie, dass

$$d := \frac{\sqrt{[X,Y,\mathtt{I}][X,Y,\mathtt{J}]}\;[A,\mathtt{I},\mathtt{J}][B,\mathtt{I},\mathtt{J}]}{\sqrt{[A,B,\mathtt{I}][A,B,\mathtt{J}]}\;[X,\mathtt{I},\mathtt{J}][Y,\mathtt{I},\mathtt{J}]}$$

eine projektive Invariante ist.

d) Interpretieren Sie diesen Term d als Verhältnis von Abständen in $\mathbb{R}^2$.

e) Was muss für A,B gelten, damit d den Abstand $\|x-y\|$ wiedergibt?

Aufgabe 5. Fläche einer Ellipse.

Für den Umfang dieser Aufgabe führen wir die folgende Notation ein.

Für eine beliebige 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$$

sei A' definiert als

$$A' = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix},$$

also der 2×2-Hauptminor.

Sei nun A die Matrix, die eine Ellipse $\mathcal{E}$ (als Kegelschnitt) beschreibt. Zeigen Sie, dass die Fläche $F_{\mathcal{E}}$ der Ellipse gegeben ist durch

$$F_{\mathcal{E}} = -\frac{\det(A)}{\sqrt{\det(A')^3}}\cdot\pi.$$

Gehen Sie dazu in den folgenden Schritten vor.

a) Zeigen Sie, dass die Formel für den Einheitskreis

$$\mathcal{E}_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{RP}^2 \mid \mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2-\mathrm{z}^2=0\}$$

gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Formel für eine allgemeine zentrierte, achsenparallele Ellipse

$$\mathcal{E}_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{RP}^2 \mid \alpha\mathrm{x}^2+\beta\mathrm{y}^2-\mathrm{z}^2=0\}$$

gilt.

c) Folgern Sie, dass die Formel auch für beliebige Ellipsen gilt. Reduzieren Sie diesen Fall auf Teil b), indem Sie euklidische Transformation (Kombinationen aus Rotationen und Translationen) auf eine allgemeine Ellipse anwenden.

Aufgabe 6. Projektive Invarianz.

Vier Punkte A, B, C, D liegen genau dann auf einem Kreis oder einer Geraden, wenn

$$[CA\mathtt{I}][DB\mathtt{I}][DA\mathtt{J}][CB\mathtt{J}] - [CA\mathtt{J}][DB\mathtt{J}][DA\mathtt{I}][CB\mathtt{I}] = 0$$

Außerdem kann der Abstand zwischen zwei Punkten X, Y bestimmt werden mit Hilfe der Formel

$$d = \frac{\sqrt{[X, Y, \mathtt{I}][X, Y, \mathtt{J}]}\ [A, \mathtt{I}, \mathtt{J}][B, \mathtt{I}, \mathtt{J}]}{\sqrt{[A, B, \mathtt{I}][A, B, \mathtt{J}]}\ [X, \mathtt{I}, \mathtt{J}][Y, \mathtt{I}, \mathtt{J}]}$$

Die beiden oben angegebenen Formeln sind projektiv invariant. Auf der anderen Seite ist von perspektivischen Abbildungen hinreichend bekannt, dass diese projektive Abbildungen sind, aber Längen verzerren und Kreise zu Ellipsen verbiegen können. Wie passt das zusammen?