

4.2 Quadriken und Polarität

4.2.1 Quadriken im P^n , $n = 2, 3$

Im affinen xy -KS des \mathbb{E}^2 ist der Kreis k um $M(1, 2)$ mit Radius $r = 3$ nach Pythagoras bestimmt durch:

$$k : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow k : x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 9$$

$$\Leftrightarrow k : x^2 - 2x + y^2 - 4y - 4 = 0 \quad \text{(a)}$$

Alle Punkte $\in \mathbb{E}^2$, deren aff. Koord. (a) erfüllen, liegen auf k .

Übergang zu homogenen Koordinaten mit Transformation: $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$ liefert

$$k : \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 - 2\frac{x_1}{x_0} + \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2 - 4\frac{x_2}{x_0} - 4 = 0 \mid \cdot (-x_0^2)$$

$$\Leftrightarrow k : 4x_0^2 - x_1^2 + 2x_1x_0 - x_2^2 + 4x_2x_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow k : (x_0, x_1, x_2) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Ausmultiplizieren des Matrizenprodukts liefert die darüberstehende Gleichung. Beachte: A kann symmetrisch gewählt werden ($A^T = A$), da z.B. $2x_0x_2 + 2x_2x_0 = 4x_0x_2$.

$$\Leftrightarrow k : \vec{x}^T A \vec{x} = 0 \quad \text{(h)} \quad \text{mit } A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eine Gleichung von $k \subset P^2$ in homogenen Koordinaten (bis auf einen Faktor $\neq 0$).

Alle Punkte $\in P^2$, deren homog. Koord. $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ die Gleichung (h) erfüllen, liegen auf k .

Figur-4-2-1-Quadrik-2D $k(M(1,2), r=3)$.

Definition: In P^2 ist $k : \vec{x}^T A \vec{x} = 0$ (*)

$$\text{mit } A := \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = A^T \neq O$$

die Gleichung einer **Kurve zweiter Ordnung** (eines **Kegelschnitts**, einer **Quadratik**) in homogenen Koord. $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{o}\}$.

Beachte: A o.E. symmetrisch, da Lösungen \vec{x} von $\vec{x}^T B \vec{x} = 0$ mit 3×3 -Matrix B auch $0^T = (\vec{x}^T B \vec{x})^T = \vec{x}^T B^T \vec{x} = 0$ erfüllen (vgl. Matrizenprodukt $(U \cdot V)^T = V^T \cdot U^T$),

also auch $\vec{x}^T (B + B^T) \vec{x} = \vec{x}^T A \vec{x} = 0$ mit $A := B + B^T = A^T$

$$\begin{aligned} 0 = \vec{x}^T A \vec{x} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_0, x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 \\ a_{01}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{02}x_0 + a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \\ &= a_{00}x_0^2 + a_{01}x_0x_1 + a_{02}x_0x_2 \\ &\quad + a_{01}x_1x_0 + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 \\ &\quad + a_{02}x_2x_0 + a_{12}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 \\ &= a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 \\ &\quad + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \end{aligned}$$

Wahl von $x_0 = 1$ als Ferngerade,

Division durch x_0^2 und Setzen von $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$ liefert

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$$

die Gleichung des Kegelschnitts im xy -KS.

Definition: In P^3 ist $Q : \vec{x}^T A \vec{x} = 0$ (*)

$$\text{mit } A := \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = A^T \neq 0$$

die Gleichung einer **Fläche zweiter Ordnung** (einer **Quadrik**) in homogenen Koordinaten $\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{\vec{o}\}$.

Ist $\det A \neq 0$, so heißt die Quadrik/der Kegelschnitt **nichtentartet**, sonst **entartet**.

Ist $\det A = 0$, so gibt es Punkte $S(\vec{s}) \in Q/k$ mit $A\vec{s} = \vec{o}$ und $\vec{s} \neq \vec{o}$. Diese nennt man **singuläre Punkte von Q/k** .

Punkte $P(\vec{p}) \in Q/k$, $A\vec{p} \neq \vec{o}$ heißen **regulär**.

Satz: Ist $S(\vec{s})$ ein singulärer Punkt und $P(\vec{p})$ ein weiterer Punkt von Q/k , so liegt die Gerade SP auf Q/k .

Beweis: Für $X(\vec{x} = u\vec{s} + v\vec{p}) \in SP$ gilt

$$\vec{x}^T A \vec{x} = (u\vec{s} + v\vec{p})^T A (u\vec{s} + v\vec{p}) = u^2 \vec{s}^T A \vec{s} + uv \vec{s}^T A \vec{p} + vu \vec{p}^T A \vec{s} + v^2 \vec{p}^T A \vec{p} = 0.$$

Beachte: $0 = (\vec{p}^T A \vec{s})^T = \vec{s}^T A^T \vec{p} = \vec{s}^T A \vec{p}$ wegen $A^T = A$.

Satz: Für jede Quadrik lässt sich durch eine Projektivität erreichen, dass ihre Gleichung in **Normalform (NF)** vorliegt:

$$x_0^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 = 0.$$

Dabei ist $2p \geq r$.

Beweis mit **quadratischer Ergänzung** am **Beispiel**,

vgl. Figur-4-2-1-Quadrik-2D (Beispiel)

$$Q : x_0^2 - 2x_0x_1 + 6x_0x_2 + 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 = 0$$

Wir klammern $2x_0$ aus allen gemischten Produkten aus, in denen x_0 vorkommt:

$$x_0^2 + 2x_0(-x_1 + 3x_2) + 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 = 0$$

Wir ergänzen die ersten zwei Summanden nach einer binomischen Formel zu einem vollständigen Quadrat und ziehen die Ergänzung wieder ab:

$$x_0^2 + 2x_0(-x_1 + 3x_2) + (-x_1 + 3x_2)^2 - (-x_1 + 3x_2)^2 + 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 = 0$$

Wir fassen das vollständige Quadrat zusammen, multiplizieren den Rest aus und sortieren:

$$(x_0 - x_1 + 3x_2)^2 + 4x_1^2 + 8x_1x_2 - 5x_2^2 = 0$$

Jetzt kommt x_0 nur noch in der ersten Klammer vor. Wir machen analog weiter mit x_1 und klammern den Faktor 4 vor den Termen mit x_1 aus:

$$(x_0 - x_1 + 3x_2)^2 + 4(x_1^2 + 2x_1x_2) - 5x_2^2 = 0$$

ergänzen in der Klammer zu einem Quadrat und ziehen die Ergänzung wieder ab:

$$(x_0 - x_1 + 3x_2)^2 + 4(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - 4x_2^2 - 5x_2^2 = 0 \quad (\text{Faktor beachten!}) \text{ und erhalten}$$

$$(x_0 - x_1 + 3x_2)^2 + 4(x_1 + x_2)^2 - 9x_2^2 = 0$$

Zum Schluss ziehen die Faktoren ($\neq \pm 1$) vor den Quadraten in die Quadrate hinein.

$$(x_0 - x_1 + 3x_2)^2 + (2x_1 + 2x_2)^2 - (3x_2)^2 = 0$$

Wir setzen:

$$x'_0 := x_0 - x_1 + 3x_2,$$

$$x'_1 := 2x_1 + 2x_2,$$

$$x'_2 := 3x_2, \quad \text{bzw. w\u00e4hlen die Projektivit\u00e4t}$$

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{=:U} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Damit erh\u00e4lt man die neue Quadrikgleichung, die **Normalform** von

$$\mathbf{Q}: x'^2_0 + x'^2_1 - x'^2_2 = \vec{x}'^T A' \vec{x}' = 0$$

mit $A' = \text{diag}(1, 1, -1)$

Wir haben es so eingerichtet, dass gilt:

Die Transformationsmatrix U in (*) ist eine obere Dreiecksmatrix

mit nicht verschwindenden Diagonalelementen, also mit $\det U \neq 0$.

Bem.: Einsetzen von $\vec{x}' = U\vec{x}$ in $\vec{x}'^T A' \vec{x}' = 0$ liefert wieder die Ausgangsgleichung von Q .

Geht das immer? Was ist mit

$$x_0x_1 = 0$$

Quadratische Ergänzung nicht möglich!

Trick:

$$\left. \begin{array}{l} x_0 =: x'_0 + x'_1 \\ x_1 =: x'_0 - x'_1 \end{array} \right\} \Rightarrow x_0x_1 = x_0'^2 - x_1'^2$$

Damit hat man Quadrate erhalten. Ggf. kann man jetzt quadratisch ergänzen.

Beispiel: Hyperbel im \mathbb{E}^2 bzw. im P^2 :

Hyperbel im affinen xy -KS des \mathbb{E}^2 :

$$h : y = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y = 1$$

Transformation $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$ liefert

$$h : \frac{x_1}{x_0} \cdot \frac{x_2}{x_0} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_0^2 - x_1x_2 = 0 \quad (1)$$

Setze $x_0 = x'_0$, $x_1 = x'_2 + x'_1$, $x_2 = x'_2 - x'_1$

$$h : x_0'^2 + x_1'^2 - x_2'^2 = 0 \quad (1')$$

Wähle in (1) $x_2 = 0$ als Ferngerade und $x' = \frac{x_0}{x_2}$, $y' = \frac{x_1}{x_2}$ als Übergang zu affinen

Koord., so folgt $h : y' = x'^2$ ist **Parabel** !

Wähle in (1') $x'_2 = 0$ als Ferngerade und

$x' = \frac{x'_0}{x'_2}$, $y' = \frac{x'_1}{x'_2}$ als Übergang zu affinen

Koord., so folgt $h : x'^2 + y'^2 = 1$ ist **Kreis**!

Kreis, Parabel und **Hyperbel** sind projektiv ununterscheidbar/äquivalent.

Normalformen von Kegelschnitten in P^2
 $k : \vec{x}^T D \vec{x} = 0$ mit 3×3 -Diagonalmatrix D
nach $\text{Rg}(D)$ (Anz. der Quadrate) und der Minuszeichen in D

Siehe: Figur 4-1-3-Quadrik-2D

Nichtentartete Kegelschnitte: 3 Quadrate

(1) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \dots$ (leere Menge)
nichtent. nullteiliger Kegelschnitt

nichtent., da $\det D \neq 0$; nullteilig, da **kein** Minuszeichen

(2) $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0 \dots$
nichtent. einteiliger Kegelschnitt

nichtent., da $\det D \neq 0$; einteilig, da **ein** Minuszeichen
(Ellipse, Parabel, Hyperbel)

Nach Wahl der Ferngeraden $x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$ oder $x_0 = 0$,
vgl. Beispiel oder Figur 4-1-3-ProjektiväquivalenterKreis

Entartete Kegelschnitte: 1 oder 2 Quadrate

(1) $x_0^2 + x_1^2 = 0 \dots (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1) = 0$
nullteiliges konj. kompl. **Geradenpaar**,
reeller **Doppelpunkt** $(0, 0, 1)$

(2) $x_0^2 - x_1^2 = 0 \dots (x_0 + x_1)(x_0 - x_1) = 0$
(einteiliges) schneidendes
bzw. **paralleles Geradenpaar**

$x_0 + x_1 = 0$, $x_0 - x_1 = 0$ mit Schnittpunkt $(0, 0, 1)$

(3) $x_0^2 = 0 \dots$ **Doppelgerade**

Ferngerade $x_0 = 0$ doppelt gezählt.

Quadrik-Normalformen im P^3 :

$Q : \vec{x}^T D \vec{x} = 0$ mit 4×4 -Diagonalmatrix D
nach $\text{Rg}(D)$ (Anz. der Quadrate) und der Minuszeichen in D

Siehe: Figur 4-1-3-Quadrik-3D

Nichtentartete Quadriken: $\det D \neq 0$

(1) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \dots (= \emptyset)$

nichtentartete nullteilige Quadrik

nichtentartet, weil die Anzahl der Quadrate 4 ist,
nullteilig, weil die Anzahl der Minuszeichen in D null ist.
Die nichtent. nullteilige Quadrik hat keine reelle Punkte.

(2) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \dots$

(nichtent. 1-teil.) ovale Quadrik

(Kugel, Ellipsoid,
elliptisches Paraboloid,
zweischaliges Hyperboloid)

Nach Wahl der Ferngeraden $x_3 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$ oder $x_0 = 0$

(3) $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \dots$

(nichtent. 2-teil.) ringartige Quadrik

(einschaliges Hyperboloid,
hyperbolisches Paraboloid)

Nach Wahl der Ferngeraden $x_3 = 0$ oder $x_1 + x_2 = 0$.

Entartete Quadriken: $\det D = 0$

(1) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \dots$
nullteiliger Kegel, Doppelpunkt
(0, 0, 0, 1) (singulärer Punkt).

(2) $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0 \dots$
einteiliger Kegel
(Kegel bzw. elliptischer Zylinder,
parabolischer Zylinder,
hyperbolischer Zylinder)

Nach Wahl der Ferngeraden $x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$ oder $x_0 = 0$

(1/2) sind **Kegel mit punktförmiger Spitze** (0, 0, 0, 1) (singulärer Punkt).

(3) $x_0^2 - x_1^2 = 0 \dots (x_0 + x_1)(x_0 - x_1) = 0$
(reelles) **schneidendes Ebenenpaar**

$x_0 + x_1 = 0$, $x_0 - x_1 = 0$ mit Schnittgerade $x_0 = x_1 = 0$

(4) $x_0^2 + x_1^2 = 0 \dots (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1) = 0$
nullteiliges konj. kompl. Ebenenpaar,
Doppelgerade $x_0 = x_1 = 0$

(3/4) sind **Quadriken mit einer Geraden** $x_0 = x_1 = 0$ von singulären Punkten.

(5) $x_0^2 = 0 \dots$ **Doppelebene**

Fernebene $x_0 = 0$ doppelt gezählt.

4.2.2 Polarität bezüglich eines Kegelschnitts oder bezüglich einer Quadrik

Ist $\mathbf{K}: \vec{x}^T A \vec{x} = 0$ mit $A^T = A \neq O$, die Gleichung eines Kegelschnitts oder einer Quadrik des P^n ($n = 2, 3$), so heißen zwei Punkte $X(\vec{x})$ und $Y(\vec{y})$ **zueinander polar bezüglich \mathbf{K}**

$$:\Leftrightarrow \vec{x}^T A \vec{y} = 0.$$

Warum darf man schreiben "zueinander" polar?

$$0 = \vec{x}^T A \vec{y} = (\vec{x}^T A \vec{y})^T = \vec{y}^T A^T \vec{x} = \vec{y}^T A \vec{x}$$

Matrizenprodukt: $(U \cdot V \cdot W)^T = W^T \cdot V^T \cdot U^T$.

Beachte: $P(\vec{p}) \in \mathbf{K}$ ist zu sich selbst polar. Zu einem singulären Punkt $S(\vec{s})$ von \mathbf{K} , d.h. $A\vec{s} = \vec{o}$ mit $\vec{s} \neq \vec{o}$, sind alle Punkte des P^n ($n = 2, 3$) polar.

4.2.3 Polare und Polarebene

Ist $P(\vec{p})$ kein singulärer Punkt der Quadrik $\mathbf{K}: \vec{x}^T A \vec{x} = 0 \subset P^n$ ($n = 2, 3$) mit $A^T = A \neq O$, so ist die Menge aller zu P polaren Punkte gegeben durch die Gleichung

$$\vec{u}^T \vec{x} = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{u} := A\vec{p} \neq \vec{o}, \quad \text{d.h.} \quad \vec{p}^T A \vec{x} = 0$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{im } P^2 \text{ eine Gerade, die } \mathbf{Polare } g_P \\ \text{im } P^3 \text{ eine Ebene, die } \mathbf{Polarebene } \varepsilon_P \end{array} \right\}$
von P bezüglich \mathbf{K} .

Eruiere mit Hilfe der Figur 4-2-3-Polare-2D Eigenschaften der Polarität an einem nichtentarteten nullteiligen Kegelschnitt. Siehe auch Figur-4-2-3-Polarebene-3D

Hauptsatz der Polarentheorie:

Ist $\vec{x}^T A \vec{x} = 0$ mit $A^T = A$ und $\det A \neq 0$ eine nichtentartete Quadrik \mathbf{K} , dann gilt:

$Q \in \text{Polare/Polarebene von } P \text{ bzgl. } \mathbf{K} \Leftrightarrow$

$Q \text{ polar zu } P \text{ bzgl. } \mathbf{K} \Leftrightarrow P \text{ polar zu } Q \text{ bzgl. } \mathbf{K}$

$\Leftrightarrow P \in \text{Polare/Polarebene von } Q \text{ bzgl. } \mathbf{K}$

Weiter gilt:

Jeder Geraden/Ebene mit der Gleichung $\vec{u}^T \vec{x} = 0$ ist genau ein **Pol** $P(\vec{p})$ mit homogenen Koordinaten $\vec{p} = A^{-1} \vec{u}$ zugeordnet.

Offenbar ist im P^2 die **Polare** eines regulären Punktes P eines Kegelschnitts k bezüglich k die **Tangente** von k in P .

4.2.4 Polarebene als Tangentenebene einer ovalen Quadrik

Beh.: Ist Q eine ovale Quadrik und ist $P(\vec{p}) \in Q$ und ε_P die Polarebene von P bzgl. Q , so ist $\varepsilon_P \cap Q = \{P\}$, also ε_P die Tangentenebene von Q in P .

Siehe Figur-4-2-4-Tangentenebene-3D

Bew.: Wir verwenden die NF von:

$$Q : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \quad (1)$$

$$\Gamma_P : p_0x_0 + p_1x_1 + p_2x_2 - p_3x_3 = 0 \quad (2)$$

mit $P(\vec{p}) \in Q \Leftrightarrow$

$$p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 = 0 \quad (3)$$

Aus (3) folgt: $p_3 \neq 0$.

Für $p_3 = 0$ folgt aus (3) $p_0 = p_1 = p_2 = 0$, d.h. Widerspruch

Aus (2), (3):

$$x_3 = \frac{1}{p_3}(p_0x_0 + p_1x_1 + p_2x_2) = \\ \pm \frac{p_0x_0 + p_1x_1 + p_2x_2}{\sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2}}$$

Einsetzen in (1):

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = \frac{(p_0x_0 + p_1x_1 + p_2x_2)^2}{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2}$$

$$1 = \frac{(p_0x_0 + p_1x_1 + p_2x_2)^2}{(p_0^2 + p_1^2 + p_2^2)(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)} = (\cos \varphi)^2$$

mit dem Winkel $\varphi = 0$ oder π zwischen den Vektoren $(x_0, x_1, x_2)^T$ und $(p_0, p_1, p_2)^T$, d.h. $(x_0, x_1, x_2)^T = \lambda(p_0, p_1, p_2)^T$ mit $\lambda \neq 0$.

Mit (2), (3) folgt auch $x_3 = \lambda p_3$, also $X(\vec{x}) = P(\vec{p})$ ist einziger Schnittpunkt.

Allgemein ist im P^3 die **Polarebene** eines regulären Punktes P einer Quadrik Q bezüglich Q die **Tangentenebene von Q in P** .

Die Tangentenebene einer ovalen Quadrik in einem Quadrikpunkt enthält genau den einen Quadrikpunkt.

Die Tangentenebene einer ringartigen Quadrik Q in einem Quadrikpunkt P enthält von Q genau den Punkt P und die beiden erzeugenden Geraden von Q durch P .

4.2.5 Polarität als Realisierung des Dualitätsprinzips

Ist $\mathbf{K}: \vec{x}^T A \vec{x} = 0$ mit $A^T = A, \det A \neq 0$, ein nichtentarteter Kegelschnitt oder eine nichtentartete Quadrik des P^n ($n = 2, 3$), so ist die Polarität bezüglich \mathbf{K} , also die bijektive Abbildung

$$\text{Pol} \leftrightarrow \text{Polare/Polarebene}$$

$$P(\vec{p}) \leftrightarrow \vec{u}^T A \vec{x} = 0 \text{ mit } \vec{u} = A\vec{p}$$

eine Realisierung des Dualitätsprinzips.

Beachte: $\det A \neq 0 \wedge \vec{p} \neq \vec{o} \Rightarrow (\vec{u} = A\vec{p} \neq \vec{o} \Leftrightarrow \vec{p} = A^{-1}\vec{u} \neq \vec{o})$.

Vgl. Figur 4-2-1-Polare-2D: $S \leftrightarrow s$.

Für $A = E$ erhält man die Dualität $\vec{x}^T \vec{y} = 0$ aus 4.1.1. bzw. 4.1.2.