Geometrie LB Kurventheorie Zusammenfassung

Notiztitel 05.01.2021

- **Parametrisierte C^r-Kurve in $\mathbb{R}^n$, $n=2$ oder 3**

$$c: \begin{cases} I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

t … Parameter

I Parameterbereich

(PD) Parameterdarstellung

Differentiationsordnung r, wenn $x_i(t)$ r-mal stetig d.b.

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} \left(\text{falls } \neq \vec{0} \text{ Tgt.richt. von } c\,! \right),\quad \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{x}_n(t) \end{pmatrix},\quad \dddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dddot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dddot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

t_0 .. singuläre Stelle der PD $\Leftrightarrow$ $\dot{\vec{x}}(t_0) = \vec{0}$ (sonst regulär)

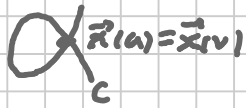
c regulär $\Leftrightarrow$ $\dot{\vec{x}}(t) \neq \vec{0}\ \forall t \in I$ $\Leftrightarrow$ $(\dot{\vec{x}}(t))^2 \neq 0\ \forall t \in I$

n Gleichungen 1 Gleichung

Tangente von c in reg. Pkt: $\vec{y} = \vec{x}(t_0) + v\,\dot{\vec{x}}(t_0)$, $v \in \mathbb{R}$

$\vec{x}(u)$ ist Doppelpkt von c $\Leftrightarrow$ $\exists\, v \neq u$ mit $\vec{x}(v) = \vec{x}(u)$

(c durchläuft diesen Pkt mind. zweimal)



Parametertransformation (PT)

$c: \vec{x}(t),\ t \in I$ und $f: \begin{cases} J \to I \\ u \mapsto t = f(u) \end{cases}$ liefern $c^*: \vec{y}(u) = \vec{x}(f(u))$

alte PD neue PD

$c^* = c \Leftrightarrow$ f ist surjektiv $\Leftrightarrow \forall t_0 \in I\ \exists u_0 \in J: f(u_0) = t_0$

Fall c und f stetig d.b. folgt mit Kettenregel: $\dot{\vec{y}}(u) = \dot{\vec{x}}(f(u)) \cdot \dot{f}(u)$

$\Rightarrow$ Für $\dot{f}(u) \neq 0\ \forall u \in J$ ist mit c auch c^* regulär!

$\Leftrightarrow$ f ist injektiv insg. bijektiv zulässige PT

($\dot{f} > 0$ gleichsinnig, $\dot{f} < 0$ gegensinnig)

- **Bogenlänge** einer reg. Kurve $c: \vec{x}(t),\ t \in [a,b] \subseteq \mathbb{R}$

$L = \int_a^b |\dot{\vec{x}}(t)|\,dt$ Länge des Kurvenbogens von $\vec{x}(a)$ bis $\vec{x}(b)$

bzw. $s = s(t) = \int_a^t |\dot{\vec{x}}(\tau)|\,d\tau$ von $\vec{x}(a)$ bis $\vec{x}(t)$

mit $\dot{s}(t) = \frac{ds}{dt} = |\dot{\vec{x}}(t)| > 0$, d.h. $s = s(t)$ ist nach $t = t(s)$ auflösbar, zumindest theoretisch, i.a. nicht explizit da ggf. Stammfkt von $|\dot{\vec{x}}(t)|$ oder Umkehrfkt nicht explizit darstellbar sind. Es gilt aber:

Satz: Jede reguläre C^r-Kurve ($r \geq 1$) lässt sich auf ihre Bogenlänge s als Parameter beziehen.

$c: \vec{y}(s) = \vec{x}(t(s))$, s Bogenlänge (natürlicher Parameter)

Ableitung $\vec{y}'(s) = \dot{\vec{x}}(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|} \Rightarrow |\vec{y}'(s)| = 1 \ \forall s$

$\Rightarrow (\vec{y}'(s))^2 = 1 \ \forall s \overset{\frac{d}{ds}}{\Rightarrow} 2\vec{y}'(s) \cdot \vec{y}''(s) = 0 \ \forall s \Rightarrow \vec{y}'(s) \perp \vec{y}''(s)$

Ableitungen nach s werden mit $'$ bezeichnet; nach t mit $\dot{}$

- Herleitung weiterer Eigenschaften von Kurven unter Verwendung der speziellen PD auf Bogenlänge

Im folgenden sei $c: \vec{x}(s) \in \mathbb{R}^3$, Bogenlänge $s \in I$ eine reguläre C^3-Kurve und w-pktfrei $\Leftrightarrow \vec{x}''(s) \neq \vec{0} \ \forall s \in I$. Dann heißen

$\vec{t}(s) := \vec{x}'(s)$	$\vec{n}(s) := \frac{\vec{x}''(s)}{\lvert\vec{x}''(s)\rvert}$	$\vec{b}(s) := \vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$
Tgtvektor	Hauptnormalenvektor	Binormalenvektor

Tangente von c in $\vec{x}(s_0)$: $\vec{y} = \vec{x}(s_0) + v\,\vec{x}'(s_0)$, $v \in \mathbb{R}$

Schmiegebene σ von c in $\vec{x}(s_0)$:
$\vec{y} = \vec{x}(s_0) + v\,\vec{x}'(s_0) + w\,\vec{x}''(s_0)$, $v, w \in \mathbb{R}$
$\vec{b}(s_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}(s_0)) = 0$ (Koordgl.)

Darstellung der Ableitungen $\vec{t}'(s), \vec{n}'(s), \vec{b}'(s)$ in der Basis (als LK) des FRENET-Dreibeins $\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)$ liefert.

$$\vec{t}'(s) = \kappa(s)\,\vec{n}(s)$$
$$\vec{n}'(s) = -\kappa(s)\,\vec{t}(s) + \tau(s)\,\vec{b}(s)$$
$$\vec{b}'(s) = -\tau(s)\,\vec{n}(s)$$

Krümmung $\kappa(s) = |\vec{x}''(s)|$

Torsion $\tau(s) = \frac{\det(\vec{x}'(s), \vec{x}''(s), \vec{x}'''(s))}{(\vec{x}''(s))^2}$

Krümmungskreis in Schmiegebene σ von c in $\vec{x}(s)$ mit Radius $\frac{1}{\kappa(s)}$ um: $\vec{m}(s) = \vec{x}(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \cdot \vec{n}(s)$.

Umrechnung mittels PT auf allgem. Parameter u liefert:

Formeln nur für Bogenlängenparametrisierung

- Sei $c: \vec{x}(u) \in \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^3-Kurve mit allg. Param. $u \in I$ und W-pktfrei $\Leftrightarrow \dot{\vec{x}}(u), \ddot{\vec{x}}(u)$ sind lin. unabhängig $\forall u \in I$
$\Leftrightarrow \dot{\vec{x}}(u) \times \ddot{\vec{x}}(u) \neq \vec{0} \;\; \forall u \in I$ ($\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}$ spannen eine Ebene auf)

Dann gilt:

Tangente von c in $\vec{x}(u_0)$: $\vec{y} = \vec{x}(u_0) + v \cdot \dot{\vec{x}}(u_0)$, $v \in \mathbb{R}$

Schmiegebene σ von c in $\vec{x}(u_0)$: $\vec{y} = \vec{x}(u_0) + v\,\dot{\vec{x}}(u_0) + w\,\ddot{\vec{x}}(u_0)$, $v, w \in \mathbb{R}$

$(\dot{\vec{x}}(u_0) \times \ddot{\vec{x}}(u_0))(\vec{x} - \vec{x}(u_0)) = 0$ (Koord.gl.)

Tgtvektor: $\vec{t}(u) = \dfrac{\dot{\vec{x}}(u)}{|\dot{\vec{x}}(u)|}$

Binormalenvektor: $\vec{b}(u) = \dfrac{\dot{\vec{x}}(u) \times \ddot{\vec{x}}(u)}{|\dot{\vec{x}}(u) \times \ddot{\vec{x}}(u)|}$

Hauptnormalenvektor: $\vec{n}(u) = \vec{b}(u) \times \vec{t}(u)$

FRENET-Ableitungsgleichungen

$$\vec{t}\,'(u) = \kappa(u) \cdot \vec{n}(u)$$
$$\vec{n}\,'(u) = -\kappa(u)\,\vec{t}(u) + \tau(u)\,\vec{b}(u)$$
$$\vec{b}\,'(u) = -\tau(u)\,\vec{n}(u)$$

Krümmung $\kappa(u) = \dfrac{|\dot{\vec{x}}(u) \times \ddot{\vec{x}}(u)|}{|\dot{\vec{x}}(u)|^3}$

Torsion $\tau(u) = \dfrac{\det(\dot{\vec{x}}(u), \ddot{\vec{x}}(u), \dddot{\vec{x}}(u))}{(\dot{\vec{x}}(u) \times \ddot{\vec{x}}(u))^2}$

Krümmungskreis in Schmiegebene σ von c in $\vec{x}(u)$ mit Radius $\frac{1}{\kappa(u)}$ um: $\vec{m}(u) = \vec{x}(u) + \frac{1}{\kappa(u)} \cdot \vec{n}(u)$

Hauptsatz: Durch Vorgabe zweier stetiger Funktionen in s $\kappa(s) > 0$ und $\tau(s)$ ist eine C^3-Raumkurve bis auf gleichsinnige Bewegungen eindeutig bestimmt.

- Ebene Kurven $c: \vec{x}(t) \in \mathbb{R}^2$, $t \in I$ $\quad (\Leftrightarrow \tau = 0 \;\; \forall u \in I)$

$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{t}(t) = \dfrac{1}{|\dot{\vec{x}}(t)|}\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$, $\vec{n}(t) = \dfrac{1}{|\dot{\vec{x}}(t)|}\begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ speziell für PD auf Bogenlänge s $(\Leftrightarrow |\vec{x}\,'(s)| = 1)$

$\vec{t}(s) = \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$, $\vec{n}(s) = \begin{pmatrix} -y'(s) \\ x'(s) \end{pmatrix}$; $\vec{t}\,'(s) = \kappa(s)\,\vec{n}(s)$, $\vec{n}\,'(s) = -\kappa(s)\,\vec{t}(s)$; $\kappa(s) = \det(\vec{x}\,'(s), \vec{x}\,''(s))$

vorzeichenbehaftet!

$\Rightarrow$ für allgem. Param. t: $\kappa(t) = \dfrac{\det(\dot{\vec{x}}(t), \ddot{\vec{x}}(t))}{|\dot{\vec{x}}(t)|^3}$

Krümmungskreismittelpkt: $\vec{m}(t) = \vec{x}(t) + \dfrac{1}{\kappa(t)} \cdot \vec{n}(t)$