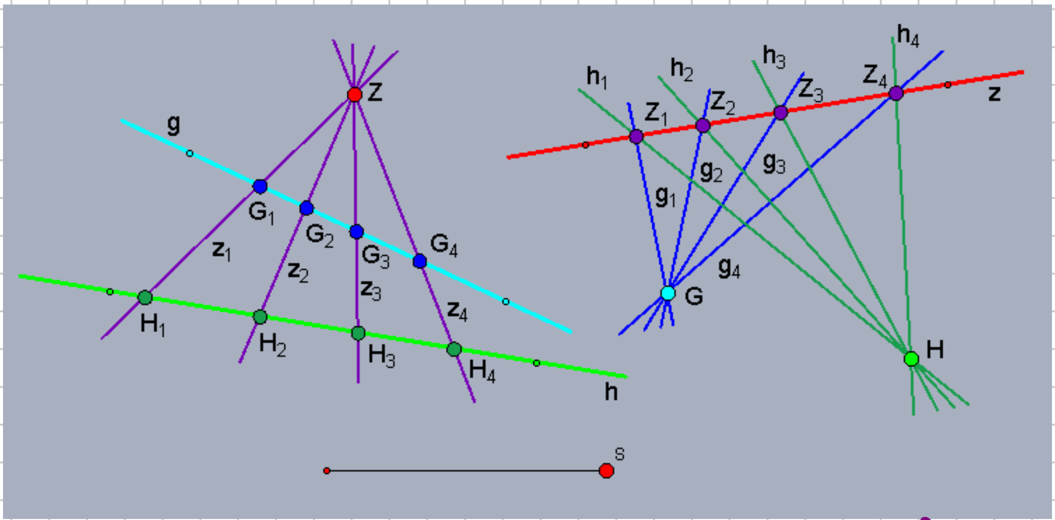
Geometrie LB   Übungen   Blatt 7

Notiztitel   16.11.2014

T 17.



Cinderella-Figur

Punkt $G_i = g \cap z_i$ Schnitt   dual zu   Gerade $g_i = G + Z_i$ Verbindung

Gerade $g \ni G_i$ ⟷   Punkt $G \in g_i$

a) **Satz S**

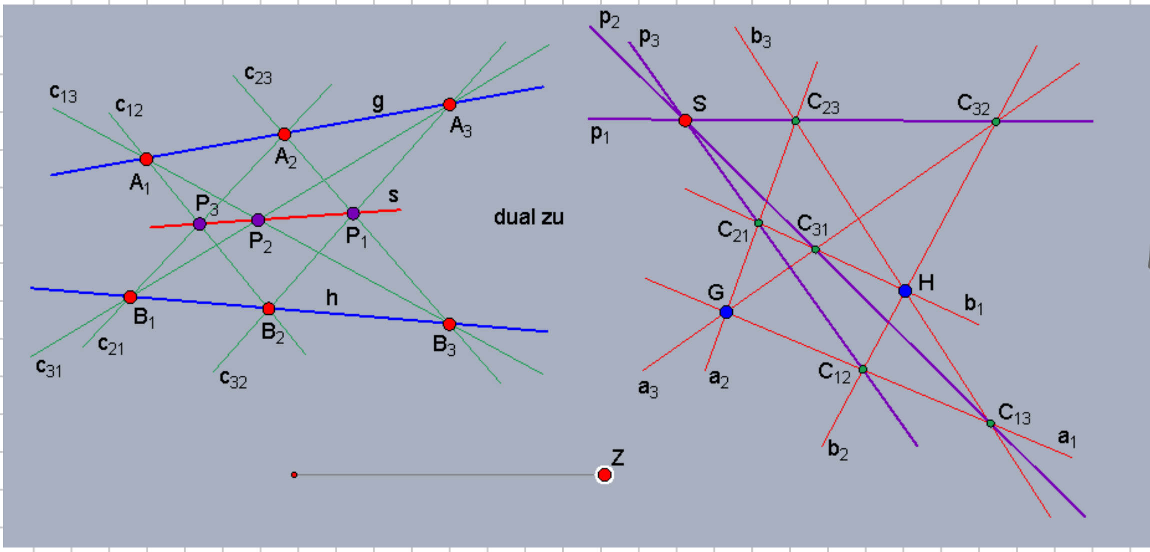
Seien g, h zwei verschiedene Geraden und Z ein Punkt mit $Z \notin g \cup h$.
Seien weiter z_1, z_2, z_3, z_4 vier Geraden durch Z (paarweise verschieden), die g in den Punkten G_1, G_2, G_3, G_4 und h in den Punkten H_1, H_2, H_3, H_4 schneiden. Dann gilt:
$DV(G_1 G_2 G_3 G_4) = DV(H_1 H_2 H_3 H_4)$

Satz S'

Seien G, H zwei verschiedene Punkte und z eine Gerade mit $G, H \notin z$.
Seien weiter Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 vier Punkte auf z (paarweise verschieden), deren Verbindungsgeraden mit G mit g_1, g_2, g_3, g_4 und mit H mit h_1, h_2, h_3, h_4 bezeichnet werden. Dann gilt:
$DV(g_1, g_2, g_3, g_4) = DV(h_1, h_2, h_3, h_4)$

b) Die Gültigkeit von Satz S' folgt aus der von Satz S, da die Aussage S' durch Dualisieren von Schnitt von Geraden oder Verbindung von Punkten erhalten wird.

T18.



ein duale Figuren

Punkt A_i auf Gerade g $\xleftrightarrow{\text{dual zu}}$ Gerade a_i durch Punkt G

Verbind.gerade $c_{ij} = A_i + B_j$ $\longleftrightarrow$ Schnittpunkt $C_{ij} = a_i \cap b_j$

Satz von Pappos

Gegeben seien zwei Geraden g und h sowie je 3 Punkte A_i auf g, B_i auf h $(i = 1, 2, 3)$.
Dann gilt: Die Schnittpunkte P_k $(1 \le k \le 3)$ der Verbindungsgeraden $c_{ij} = A_i + B_j$ und $c_{ji} = A_j + B_i$ $(1 \le i, j \le 3,\ i \ne j \ne k \ne i)$ liegen kollinear (auf einer Geraden s)

duale Aussage von Pappos

Gegeben seien zwei Punkte G und H sowie je 3 Geraden a_i durch G, b_i durch H $(i = 1, 2, 3)$
Dann gilt: Die Verbindungsgeraden p_k $(1 \le k \le 3)$ der Schnittpunkte $C_{ij} = a_i \cap b_j$ und $C_{ji} = a_j \cap b_i$ $(1 \le i, j \le 3,\ i \ne j \ne k)$ liegen kopunktal (schneiden einander in einem Punkt S)

Bemerkung: Die beiden Figuren haben gleich viele Punkte wie Geraden (9 Punkte | 9 Geraden) und sehen letztlich „gleich" aus. Die Aussagen sind aber unterschiedlich.

Realisierung: Vertausche in Geradengl. u: $\vec{u}^T \vec{x} = 0$ die Rolle der homogenen Punkt- bzw Geradenkoord. $\Rightarrow$ $\underset{\text{Punkt}}{X(\vec{x})} \in \underset{\text{Gerade}}{u(\vec{u})} \xleftrightarrow{\text{dual}} \underset{\text{Punkt}}{U(\vec{u})} \in \underset{\text{Gerade}}{x(\vec{x})}$

Schnittpkt $X(\vec{x}) = u(\vec{u}) \cap v(\vec{v})$ der Geraden $\Leftrightarrow$ $\begin{matrix} \vec{u}^T \vec{x} = 0 \\ \vec{v}^T \vec{x} = 0 \end{matrix}$ $\xleftrightarrow[\text{dual}]{}$ Verb.gerade $x(\vec{x}) = U(\vec{u})\, V(\vec{v})$ der Punkte

Analog im P^3: Pkt $\leftrightarrow$ Ebene, Schnittgerade $u \cap v$ $\leftrightarrow$ Verb.gerade UV

$\vec{u} = \begin{pmatrix} b \\ m \\ -1 \end{pmatrix}$

T19 a) Gerade g: $y = mx + b$ $\xleftrightarrow[y = \frac{x_2}{x_0}]{x = \frac{x_1}{x_0}}$ $\quad$ in homogenen Koord. $\vec{u}^T \vec{x} = 0$

in affinen Koord.

Eine Projektivität (bijektive geradentreue Abb. $P^n \to P^n$)

ist gegeben durch $\vec{y} = \mathcal{U} \vec{x}$ mit $(n+1)\times(n+1)$-Matrix $\mathcal{U}$ und $\det \mathcal{U} \neq 0$

Die wie folgt gewählte Abbildung:

$y_0 =$

$y_1 =$

$y_2 =$

bildet g auf die Ferngerade $y_0 = 0$ ab, da für $X(\vec{x}) \in g \Rightarrow$ $bx_0 + mx_1 - x_2 = 0$

$= \mathcal{U}$ mit $\det \mathcal{U} = -1 \neq 0$ ist ein Projektivit.

b) Kreis k: $x^2 + y^2 = 1$ $\xleftrightarrow[y = \frac{x_2}{x_0}]{x = \frac{x_1}{x_0}}$

in affinen Koord.

in homogenen Koord.

$= A$ mit $A^T = A$

Bild k' bei Projektivität erhält man durch Einsetzen als

$= B$ mit $B^T = \mathcal{U}^{-1T} \underbrace{A^T}_{=A} \mathcal{U}^{-1} = B$

Kegelschnitt $\vec{y}^T B \vec{y} = 0$

Berechnung von $\mathcal{U}^{-1}$ aus $(*)$:

$x_0 =$

$x_1 =$

$x_2 =$

$\mathcal{U}^{-1}$ hier schneller bestimmt als mit Schema $(\mathcal{U} | E)$!

$= \mathcal{U}^{-1}$

$\Rightarrow B = \mathcal{U}^{-1T} A \, \mathcal{U}^{-1} = \underbrace{\qquad\qquad}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & -1 & -m \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{m = 0}}$

$\Rightarrow k'$: $\vec{y}^T \begin{pmatrix} -1 & b & 0 \\ b & 1-b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{y} =$

in homogenen Koord.

$$x' = \frac{y_1}{y_0} \quad \Longleftrightarrow \quad y' = \frac{y_2}{y_0}$$ in affinen Koord.

① **Für b=0** ergibt sich: k': $x'^2 - y'^2 = 1$ Hyperbel mit Asymptoten $y' = \pm x'$, d.h. zwei Fernpunkten $(0,1,\pm 1)$.

Beachte: $g \cap k$ sind zwei Pkte mit den homogenen Koord.
$$\begin{pmatrix}1\\\pm1\\0\end{pmatrix} \to U\begin{pmatrix}1\\\pm1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\pm1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\\pm1\end{pmatrix}.$$

② **Für b=1** ergibt sich: k': $2x' - y'^2 = 1 \Leftrightarrow x' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y'^2$

Parabel nach rechts geöffnet mit x'-Achse als Achse mit Fernpunkt $(0,1,0)$.

Beachte: $g \cap k$ ist ein Punkt $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \to U\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

③ **Für b=2** ergibt sich: k': $-3x'^2 + 4x' - y'^2 = 1$

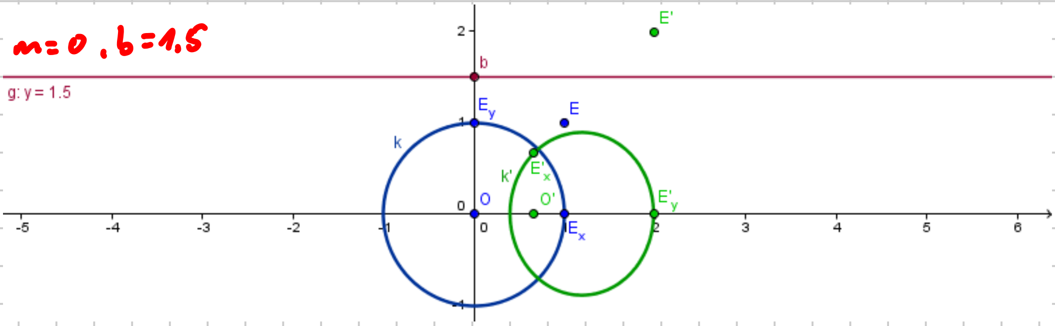
$\Leftrightarrow 3\left(x'^2 - \frac{4}{3}x'\right) + y'^2 = -1$ | erg. $\frac{4}{3}$ $\Leftrightarrow 3\left(x' - \frac{2}{3}\right)^2 + y'^2 = \frac{1}{3}$

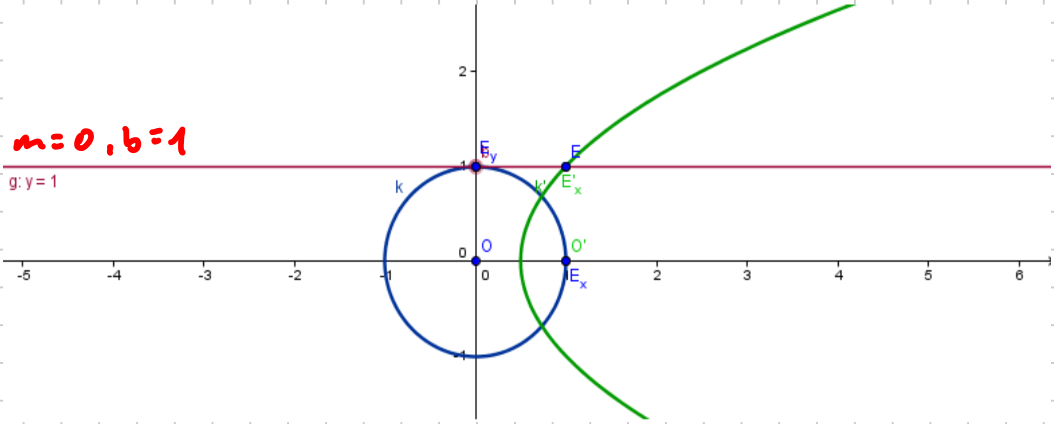
Ellipse um Mittelpunkt $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ (ist nicht Bild von $(0,0)$!)

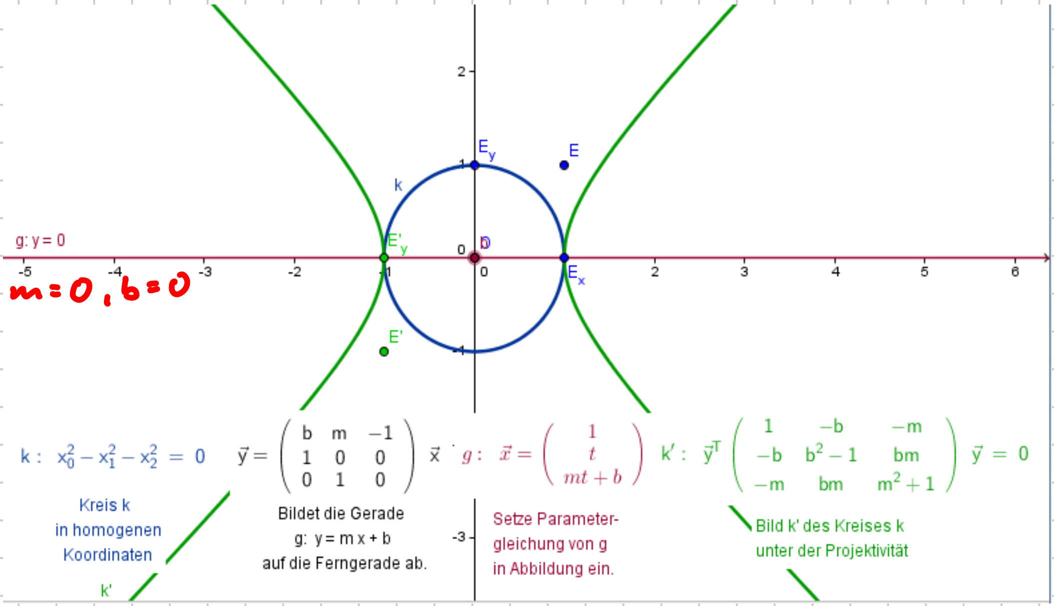
Beachte: $g \cap K = \emptyset$, d.h. k' besitzt keine Fernpkte

Allgemein gilt:

- Trifft g den Kreis k in 2 Punkten, so ist k' eine Hyperbel mit 2 Fernpunkten = Bild der Schnittpunkte $g \cap k$
- Trifft g den Kreis k in genau 1 Punkt, so ist k' eine Parabel mit Achse in Richtung des Fernpunktes = Bild Berührpkt $g \cap k$
- Trifft g den Kreis k nicht, so ist k' eine Ellipse.




m=0, b=1
g: y = 1
k
k'
O
O'
E
E_y
E'_x
E_x


g: y = 0
m=0, b=0
k
E
E_y
E'_y
E_x
E'
O
k'
$k: x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$
Kreis k in homogenen Koordinaten
$\vec{y} = \begin{pmatrix} b & m & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$
Bildet die Gerade g: y = m x + b auf die Ferngerade ab.
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ mt+b \end{pmatrix}$
Setze Parametergleichung von g in Abbildung ein.
$k': \vec{y}^T \begin{pmatrix} 1 & -b & -m \\ -b & b^2-1 & bm \\ -m & bm & m^2+1 \end{pmatrix} \vec{y} = 0$
Bild k' des Kreises k unter der Projektivität