Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert
Lena Polke, Michael Strobel

Geometriekalküle WS 2019/20

https://geo.ma.tum.de/de/lehre/geometriekalkuele.html

Aufgabenblatt 4 (2019–12–02)

Level 0

Aufgabe 1. Grundlagen.

(a) Beweisen Sie, dass eine projektive Transformation im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ eingeschränkt auf eine Fixgerade eine projektive Transformation des $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ ist.

(b) Was bedeutet es für eine Funktion $f : \mathcal{P}_{\mathbb{R}}^k \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, für ein $k \in \mathbb{N}^+$, projektiv invariant zu sein?

(c) Ist der Term, bestehend aus Punkten der reellen projektiven Ebene,

$$\frac{[A, B, C] \cdot [B, C, D]}{[C, D, E]^3}$$

projektiv invariant?

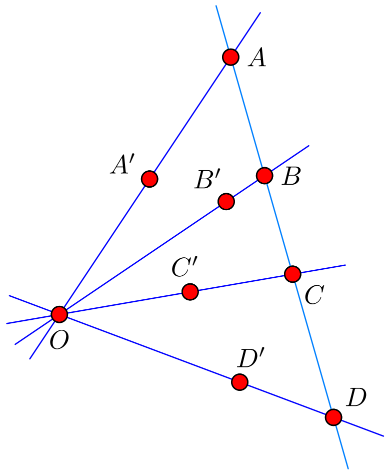
(d) Wiederholen Sie, wie man ein Schachbrett projektiv richtig zeichnet. Erklären Sie, was das mit der harmonischen-Lage-Konstruktion aus der Vorlesung zu tun hat.

Aufgabe 2. Plückers μ.

Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, die auf einem gemeinsamen Definitionsbereich D definiert sind, und $P \in D$ ein beliebiges Element dieses Definitionsbereichs. Geben Sie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ an, so dass die Linearkombination $\lambda f + \mu g$ der Funktionen an der Position P eine Nullstelle hat, und $(\lambda, \mu)^T \neq (0, 0)^T$.

Aufgabe 3. Punkte von O aus gesehen.

Gegeben seien vier paarweise verschiedene Geraden a, b, c, d in $\mathbb{RP}^2$. Alle vier Geraden schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt O.



a) Es seien A, B, C, D vier kollineare und von O verschiedene Punkte auf a, b, c, d. Beweisen Sie:

$$(A, B; C, D) = \frac{[O, A, C][O, B, D]}{[O, A, D][O, B, C]}$$

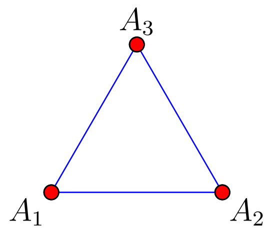
b) Es seien A', B', C', D' vier von O verschiedene Punkte auf a, b, c, d. Beweisen Sie:

$$(a, b; c, d) = \frac{[O, A', C'][O, B', D']}{[O, A', D'][O, B', C']}$$

c) Den Ausdruck auf den rechten Seiten schreiben wir als $(A, B; C, D)_O$ bzw. $(A', B'; C', D')_O$ und nennen ihn das **Doppelverhältnis von vier Punkten von einem fünften aus gesehen**. Dieser kann offensichtlich für (fast) alle Punkte im $\mathbb{RP}^2$ definiert werden. Erklären Sie, wie die Ergebnisse der obigen Teilaufgaben im Bezug auf dieses neue „allgemeinste Doppelverhältnis“ interpretiert werden können.

Aufgabe 4. Harmonische Lage am Dreieck.

Gegeben sei ein (nicht-entartetes) Dreieck mit den Eckpunkten A_1, A_2 und A_3 im $\mathbb{RP}^2$.



a) Wählen Sie drei Punkte B_1, B_2, B_3 auf den drei Dreiecksseiten, so dass B_1 auf der Dreiecksseite A_2A_3, B_2 auf der Dreiecksseite A_1A_3 und B_3 auf der Dreiecksseite A_1A_2 liegt und sich die drei Strecken A_iB_i für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ in einem Punkt schneiden.

b) Bestimmen Sie nun drei weitere Punkte C_1, C_2, C_3 mit folgender Eigenschaft:

   Für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ liege C_i auf der Geraden durch die Punkte A_j und A_k, und die Punkte A_j, A_k, B_i, C_i sind in harmonischer Lage, d.h. $(A_j, A_k; B_i, C_i) = -1$.

c) Zeigen Sie: Die so konstruierten Punkte C_1, C_2 und C_3 sind kollinear.

d) Interpretieren Sie die obige Konstruktion unter der Voraussetzung, dass die Punkte C_1, C_2 und C_3 Fernpunkte sind.

Aufgabe 5. Doppelverhältnisse permutiert.

a) Für vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 sei das Doppelverhältnis $(P_1, P_2; P_3, P_4) = \lambda$. Berechnen Sie für alle Permutationen $\pi \in S_n$ das Doppelverhältnis $(P_{\pi(1)}, P_{\pi(2)}; P_{\pi(3)}, P_{\pi(4)})$.

b) Gegeben seien drei Punkte auf einer Geraden im $\mathbb{RP}^2$. Konstruieren Sie einen vierten Punkt, so dass alle vier Punkte in harmonischer Lage sind.

   Wie viele Möglichkeiten haben Sie, diesen vierten Punkt zu konstruieren?

Aufgabe 6. Projektive Skalen.

Gegeben sei die folgende (unvollständige) Photographie vom Umriss eines Tic-Tac-Toe-Spielfeldes mit 3×3 quadratischen Feldern. Zeichnen Sie die Felder *perspektivisch richtig* ein. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen, und lassen Sie eventuelle Hilfskonstruktionen erkennbar.

Es gibt mindestens vier verschiedene Lösungswege für diese Aufgabe. Finden Sie so viele wie möglich.