Geometrie LB Übungen Blatt 6

Notiztitel 08.11.2014

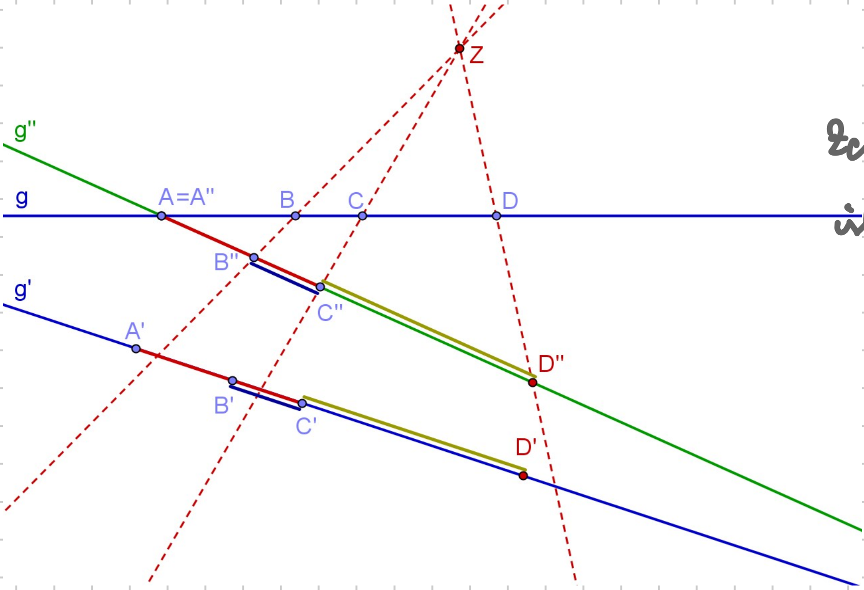
T14: <u>Konstruktive DV-Übertragung</u> (vgl. GeoGebra-Figuren zu T14)

Gegeben: 4 verschiedene Punkte $A, B, C, D \in g$ Gerade
und 3 verschiedene Punkte $A', B', C' \in g'$ Gerade

Gesucht: $D' \in g'$ so, dass $DV(A', B', C', D') = DV(A, B, C, D)$

$DV(A,B,C,D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \varepsilon$ mit $\varepsilon = \pm 1$ A, B trennt C, D oder nicht

$D \to$ Fernpunkt $\Rightarrow DV \to TV(A,B,C) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$



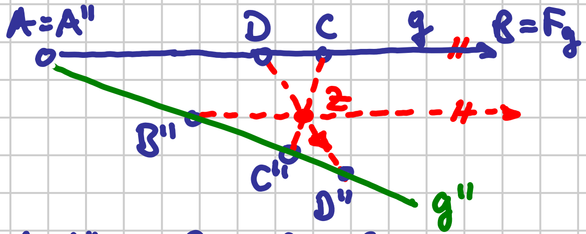
Zentralprojektion ist DV-treu!

<u>Konstruktionsbeschreibung</u>

1) Wähle $g'' \neq g$ durch A und übertrage die (gerichteten) Strecken $\overrightarrow{A'C'}$ und $\overrightarrow{B'C'}$ von $A'' = A$ aus auf g''.
2) Ermittele $Z = BB'' \cap CC''$ und $D'' = ZD \cap g''$, dann gilt: $DV(A'', B'', C'', D'') = DV(A, B, C, D)$, da A'', B'', C'', D'' nach Konstruktion Bilder von A, B, C, D unter der Zentralprojektion $\kappa_Z : g \to g'' = \kappa_Z(g)$ $Z \notin g, g''$ sind
3) Übertrage die (gerichtete) Strecke $\overrightarrow{C''D''}$ von C' aus auf g' → D' mit $DV(A', B', C', D') = DV(A'', B'', C'', D'') = DV(A, B, C, D)$.

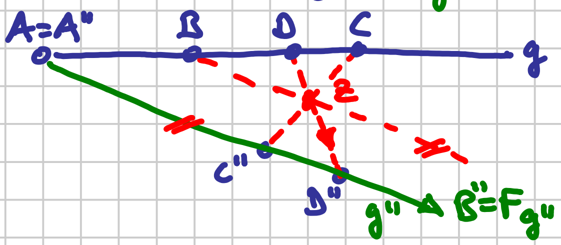
Diese Konstruktion ist in der projektiv abgeschlossenen eukli-dischen Ebene allgemeingültig. Wir betrachten einige Sonderfälle

1) $A \neq F_g$ (Fernpunkt von g)



1.1) $B = F_g$ (oder $C = F_g$)

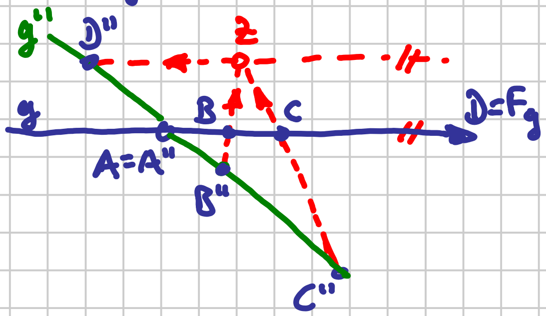
$\Rightarrow CC'' \nparallel g \Rightarrow Z = B''B \cap C''C \ldots$ kein Fernpkt



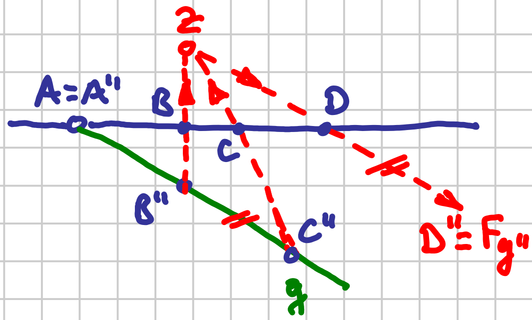
1.2) $B'' = F_{g''}$ (oder $C'' = F_{g''}$)

$\Rightarrow CC'' \nparallel g'' \Rightarrow Z = B''B \cap C''C \ldots$ kein Fernpkt

1.3) $D = F_g$, Z kein Fernpkt

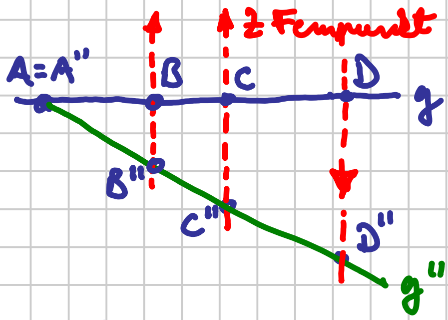


1.4) Z kein Fernpkt, $D'' = F_{g''}$



1.5) Ist Z ein Fernpunkt, dann ist κ_Z eine Parallelprojektion (DV-Übertrag ≙ zentr. Streck. aus A)

Ist $D = F_g \Rightarrow D'' = F_{g''} \Rightarrow D' = F_{g'}$

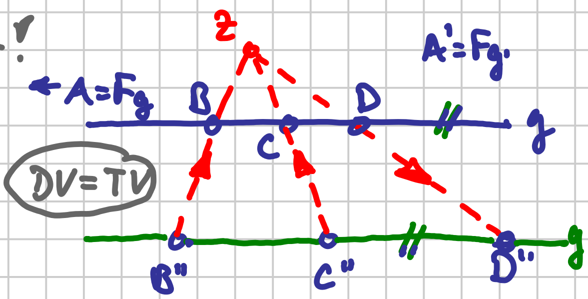


2) Ist $A = F_g$, so übertrage DV(B, A, D, C) = DV(A, B, C, D)

mit g'' durch B = B'' wie oben!

oder: wenn auch $A' = F_{g'}$

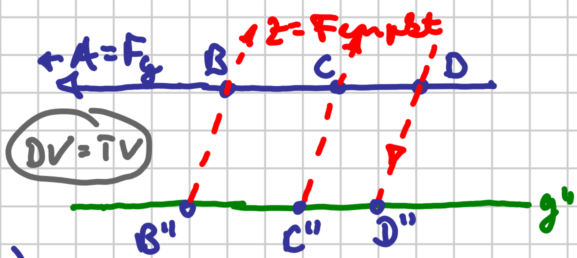
wähle B'' beliebig auf $g'' \parallel g$



2.1) Z eigentlich $\Rightarrow \kappa_Z$ ~ eine zentrische Streckung aus Z

2.2) Z ist Fernpunkt $\neq F_g \Rightarrow$ κ_Z ist Parallelprojektion

(DV-Übertrag durch Parallelogramm)



T15) a) Verbindungsgerade in P^2: (Kreuzprodukt)

$P(\vec{p}),\ Q(\vec{q})$ mit $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ homog. Pktkoord. $\Rightarrow$

$g = PQ$ hat die homogenen Geradenkoordinaten

$$\vec{g} = \vec{p} \times \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ 9-2 \\ 1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$g:\ 0 = \vec{g}^T \vec{x} = (1\ \ 7\ \ -5)\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_0 + 7x_1 - 5x_2$$

Probe: Einsetzen von $\vec{p}$ und $\vec{q}$

b) Schnittpunkt in P^2: (Kreuzprodukt)

$$\left.\begin{aligned} g:\ x_0 + 7x_1 - 5x_2 &= 0 \\ h:\ 10x_0 + 7x_1 - 5x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix},\ \vec{h} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$ homog. Geradenkoord.

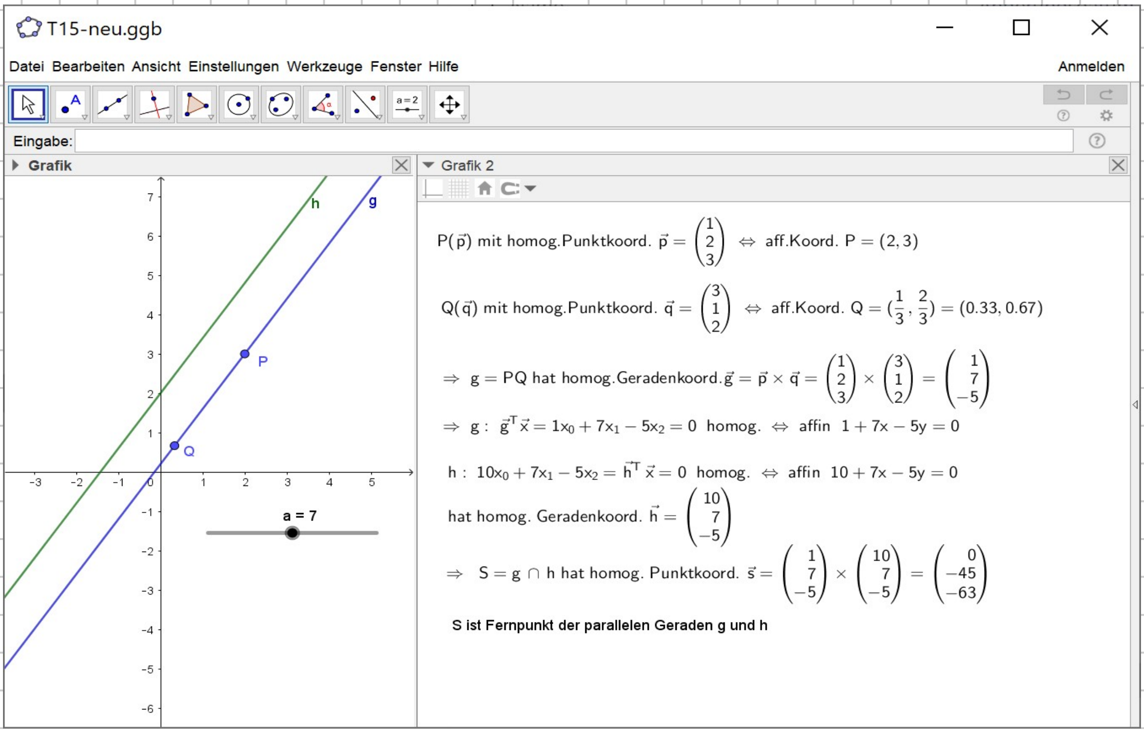
$S = g \cap h$ hat die homogenen Punktkoord.

Fernpkt

$$\vec{s} = \vec{g} \times \vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35+35 \\ -50+5 \\ 7-70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -45 \\ -63 \end{pmatrix} = -9\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ S ist Fernpkt in Richtung $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ Normale von g

d.h. g und h sind parallel   affin $g:\ 1 + 7x - 5y = 0$



T16: Gegeben: Ebene ε : $\vec{u}^T \vec{x} = 0$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ Nullvektor

Punkt $Z(\vec{z}) \notin \varepsilon$, d.h. $\vec{u}^T \vec{z} \neq 0$.

Gesucht: Bildpunkt $Y(\vec{y})$ zu $X(\vec{x}) \in P^3 \setminus \{Z\}$ bei Zentralprojektion aus Z auf ε, d.h. der Schnittpunkt $Y(\vec{y}) = ZX \wedge \varepsilon$.

Sei $X(\vec{x}) \in P^3 \setminus \{Z\}$ $\Rightarrow$ Parametergleichung der Geraden $g := ZX$: $\vec{y} = s \cdot \vec{x} + t \cdot \vec{z}$ $\Rightarrow$ Schnittbedingung mit ε

$$0 = \vec{u}^T \vec{y} = \vec{u}^T (s \cdot \vec{x} + t \cdot \vec{z}) = s \cdot \underbrace{\vec{u}^T \vec{x}} + t \cdot \underbrace{\vec{u}^T \vec{z}}$$

Wähle $(s,t) = (\vec{u}^T \vec{z}, -\vec{u}^T \vec{x})$ skalare Größen $\in \mathbb{R}$!

oder als Vielfaches $\neq 0$ davon

$$\Rightarrow \quad \vec{y} = (\vec{u}^T \vec{z}) \cdot \vec{x} - (\vec{u}^T \vec{x}) \cdot \vec{z} = (\vec{u}^T \cdot \vec{z})\, \vec{x} - \underbrace{\vec{z} \cdot (\vec{u}^T \cdot \vec{x})}$$

Alle Multiplikationen im 2. Summanden kann man als Matrizenmultiplikationen interpretieren, d.h. mit dem Assoziativgesetz gilt: $\vec{z} \cdot (\vec{u}^T \cdot \vec{x}) = (\vec{z} \cdot \vec{u}^T) \cdot \vec{x}$

$(n=4)$

$$\underbrace{(n,1)\text{-Matrix} \cdot \overbrace{(1,n)\text{-Matrix}}^{}}_{(n,n)\text{-Matrix}} \overbrace{\cdot\, (n,1)\text{-Matrix}}^{(1,1)\text{-Matrix}} = (n,1)\text{-Matrix}$$

Mit Einheitsmatrix E gilt: $\vec{x} = E \cdot \vec{x}$.

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{y}}} = (\vec{u}^T \vec{z}) \cdot E \cdot \vec{x} - (\vec{z} \cdot \vec{u}^T) \cdot \vec{x} = \underline{\underline{[(\vec{u}^T \vec{z}) \cdot E - (\vec{z}\, \vec{u}^T)]\, \vec{x}}}$$

Damit ist $\underline{A = (\vec{u}^T \vec{z}) \cdot E - (\vec{z}\, \vec{u}^T)}$ und $\underline{\vec{y} = A \cdot \vec{x}}$

b) $A \vec{z} = [(\vec{u}^T \vec{z}) E - (\vec{z}\, \vec{u}^T)]\, \vec{z} = (\vec{u}^T \vec{z}) \cdot \vec{z} - \underbrace{(\vec{z}\, \vec{u}^T) \cdot \vec{z}} =$

$= (\vec{u}^T \vec{z}) \cdot \vec{z} - \underbrace{\vec{z}\, (\vec{u}^T \vec{z})} = \underline{\underline{0}}$ Matrizenprod. wie oben

$\Rightarrow Z$ hat kein Bild !, vgl. $X \in P^3 \setminus \{Z\}$ in a)

c) $A \vec{x} = [(\vec{u}^T \vec{z}) \cdot E - (\vec{z}\, \vec{u}^T)]\, \vec{x} = (\vec{u}^T \vec{z}) \cdot \vec{x} - \underbrace{(\vec{z}\, \vec{u}^T) \cdot \vec{x}} =$

$= (\vec{u}^T \vec{z}) \cdot \vec{x} - \underbrace{\vec{z} \cdot (\vec{u}^T \vec{x})} = (\vec{u}^T \vec{z}) \cdot \vec{x}$

Für $X \in \varepsilon$: $= 0$ $\qquad$ $\neq 0$ da $Z \notin \varepsilon$.

$\Rightarrow$ Bild von $X \in \varepsilon$ ist X, d.h. ε ist eine Fixpunktebene