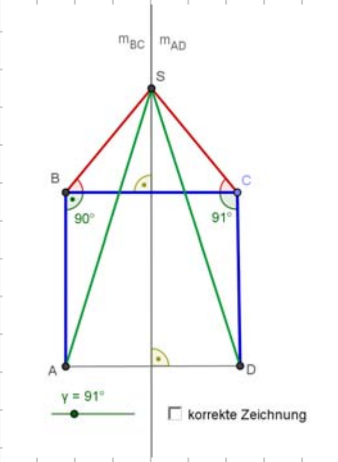
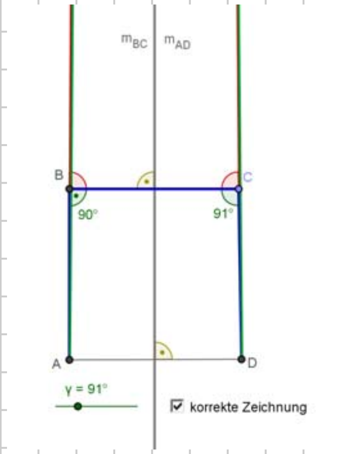
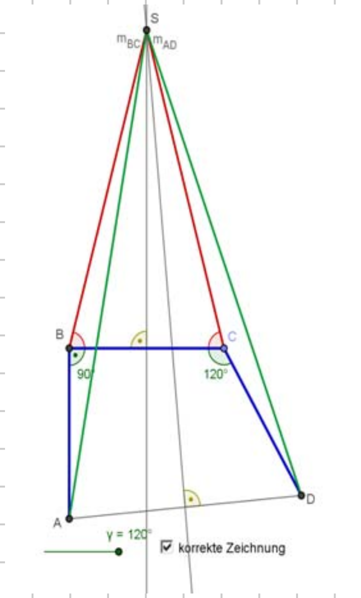
Geometrie LB Blatt 2 Hausaufgaben

Notiztitel 18.10.2014

H3





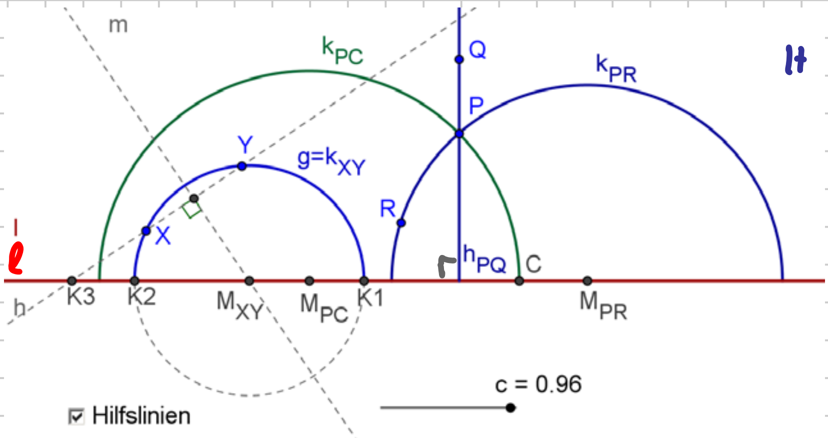


Vorbemerkung: D liegt auf dem Kreis um C mit Radius $\overline{AB}$, der die Parallele zu BC durch A genau dann berührt, wenn $\sphericalangle BCD = 90°$

$\Rightarrow$ Für $\sphericalangle BCD \neq 90°$ gilt: $BC \nparallel AD \Leftrightarrow m_{BC} \nparallel m_{AD} \Rightarrow \exists\, S = m_{BC} \cap m_{AD}$

In der korrekten Zeichnung liegt S weit oberhalb des in der vorliegenden Figur angegebenen Punktes S.
Allerdings liegen in der korrekten Zeichnung Linien übereinander, so dass diese keine Schlüsse zulässt.
Die in der Aufgabenstellung angegebene Begründung ist aber für alle Winkel $\gamma := \sphericalangle BCD > 90°$ gültig.
Wählt man $\gamma = \sphericalangle BCD = 120°$ (statt 91°), so erkennt man in der korrekten Zeichnung, dass die Dreiecke ABS und DCS kongruent sind, jedoch der Innenwinkel $\sphericalangle DCS$ ($<180°$) nicht die Summe der Winkel $\gamma = \sphericalangle BCD$ und $\sphericalangle BCS$ ist, wie in der angegebenen Begründung. Also ist diese auch für $\sphericalangle BCD = 91°$ falsch.

H 4 **Vorbemerkung:** Ein Kreis schneidet in der bekannten Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$ eine Gerade orthogonal $\Leftrightarrow$ Die Gerade enthält den Kreismittelpunkt.



Wir betrachten die Punktmenge $H := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0\}$

die Geradenmenge $\mathcal{G} := \{\text{Halbkreise in } H \text{ um Mittelpunkte auf } \ell: y=0\} \cup \{\text{Halbgeraden in } H \perp \ell\}$

H ist obere Halbebene des $\mathbb{R}^2$

a) Zu zeigen: $(H, \mathcal{G})$ ist ein Inzidenzraum, d.h. erfüllt

I 1: Zu $X, Y \in H$ (Punktmenge) mit $X \neq Y$ gibt es genau ein $g \in \mathcal{G}$ (Menge der Geraden $\subset$ Potenzmenge von H) mit $X, Y \in g$.

I 2: Für alle $g \in \mathcal{G}$ gilt: g enthält mind. zwei Punkte

Bei den folgenden Überlegungen müssen wir klar Objekte in $(H, \mathcal{G})$ von Hilfsobjekten im $\mathbb{R}^2$ (Verbindungsgeraden, Mittelloten, etc.) unterscheiden. Diese sind in der Figur grau gestrichelt eingetragen.

I 2 ist hier sicher erfüllt.

Zu I 1 Fallunterscheidung nach Lage der Verbindungsgeraden $h = XY$ in $\mathbb{R}^2$ zu ℓ Mittellot zu X, Y in $\mathbb{R}^2$

Fall 1: XY nicht senkrecht zu $\ell \Rightarrow M_{XY} = m_{XY} \cap \ell$ ist eindeutig $\Rightarrow g = k_{XY} = K(M_{XY}, X) \cap H$ Halbkreis über K1, K2

Kreis um M_{XY} durch X und Y (1)

Fall 2: XY senkrecht zu $\ell \Rightarrow g = h_{XY} = XY \cap H$ Halbgerade (2)

(1) $\vee$ (2) $\Rightarrow$ Verbindungsgerade zu X und Y in $(H, \mathcal{G})$ eindeutig.

b) Zu $g = K_{XY}$ gibt es offensichtlich ∞ viele $K \in \mathcal{G}$ durch $P \in H \setminus g$ mit $g \cap K = \emptyset$ vgl in Skizze k_{PR} oder h_{PQ} oder k_{PC}, wobei man in der GeoGebra-Figur mit dem Schieberegler c eine ganze Schar „paralleler" Geraden durch P zu g erhält
$\Rightarrow$ Parallelenaxiom ist nicht erfüllt $\Rightarrow$
$(H, \mathcal{G})$ ist keine affine Ebene

Zusatz: Modell der ellipitischen Ebene
Ebenen durch den Mittelpunkt M einer Kugel Σ schneiden die Kugel in Großkreisen (Kreisen um M mit Radius = Kugelradius). Punkte von Σ, deren Verbindungsgeraden den Kugelmittelpunkt enthalten, bezeichnet man als antipodische Punkte. Es gilt:
$(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ mit $\mathcal{P}$ = Menge der Paare antipodischer Punkte und $\mathcal{G}$ = Menge aller Großkreise ist ein Inzidenzraum aber keine affine Ebene.

Beweis: X, Y, M nicht kollinear
I1 ist erfüllt, da zu $X, Y \in \Sigma$ mit $X \neq Y$ die Ebene XYM die Kugel stets in einem Großkreis schneidet.
I 2 ist trivial erfüllt.
E 2 ist aber nicht erfüllt, da zwei Großkreise einander stets in zwei antipodischen Punkten (auf der Schnittgerade der Trägerebenen der Großkreise) schneiden.
Es gibt also keine „parallelen Geraden".