3 Einführung von Koordinaten

3.1 Affine Koordinaten

3.1.1 Affines Koordinatensystem im Raum

Figur 3-1-1-affinesKS

Im dreidimensionalen euklidischen Anschauungsraum $\mathbb{E}^3$ wählen wir einen Punkt O, den **Koordinatenursprung** und drei Geraden durch O, die nicht in einer Ebene liegen, die x-, die y- und die z-**Achse**.

Die Geraden brauchen nicht paarweise zueinander orthogonal zu sein, in der affinen Geometrie gibt es noch keine Metrik.

Auf der x-Achse wählen wir einen Punkt $E_x \neq O$ als **Einheitspunkt**
usw.

Dabei ist im allgemeinen
$d(E_x, O) \neq d(E_y, O) \neq d(E_z, O) \neq d(E_x, O)$.

Die x- und die y-Achse spannen die xy-**Ebene** auf usw.

Ist P ein Punkt im $\mathbb{E}^3$, so schneiden die Parallelen durch P zur
z-Achse die xy-Ebene im Punkt P',
x-Achse die yz-Ebene im Punkt P'' und
y-Achse die xz-Ebene im Punkt P'''.

Die Parallele zur y-Achse durch P' schneidet die x-Achse im Punkt P_x,
die Parallele zur x-Achse durch P' schneidet die y-Achse im Punkt P_y und
die Parallelebene zur xy-Ebene durch P schneidet die z-Achse im Punkt P_z.

Man erhält so einen Spat/Parallelepiped.

Das Teilverhältnis

$$TV(P_x E_x O) = \frac{d(P_x, O)}{d(E_x, O)} \cdot \varepsilon_x$$

mit $\varepsilon_x = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right\}$, falls O $\left\{ \begin{array}{c} \text{nicht} \\ \ \end{array} \right\}$ zwischen E_x und P_x liegt. (siehe 2.2.5) heißt x-**Koordinate** p_x von P bezüglich des **affinen** xyz-**Koordinatensystems**.

Analog: p_y, p_z.

Für den Punkt P gilt dann:

$$\overrightarrow{OP} = p_x \cdot \overrightarrow{OE_x} + p_y \cdot \overrightarrow{OE_y} + p_z \cdot \overrightarrow{OE_z}$$

Kurzschreibweise: $P(p_x, p_y, p_z)$: Der Punkt P hat die **affinen Koordinaten** p_x, p_y, p_z.

P hat bezüglich dieses xyz-**Koordinatensystems** (xyz-**KS**)
den **Koordinatenvektor** $\vec{p} := \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$.

3.1.2 Wechsel von affinen KSen bei gleichem Ursprung

Figur-3-1-2-Koordinatenwechsel (im $\mathbb{E}^2$)

NR im $\mathbb{E}^2$: Basiswechsel $\begin{array}{l} \vec{e'}_x = a_{11}\vec{e}_x + a_{21}\vec{e}_y \\ \vec{e'}_y = a_{12}\vec{e}_x + a_{22}\vec{e}_y \end{array}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= p_x\vec{e}_x + p_y\vec{e}_y = p'_x\vec{e'}_x + p'_y\vec{e'}_y \\ &= p'_x(a_{11}\vec{e}_x + a_{21}\vec{e}_y) + p'_y(a_{12}\vec{e}_x + a_{22}\vec{e}_y) \\ &= (a_{11}p'_x + a_{12}p'_y)\vec{e}_x + (a_{21}p'_x + a_{22}p'_y)\vec{e}_y \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert: $\begin{array}{l} p_x = a_{11}p'_x + a_{12}p'_y \\ p_y = a_{21}p'_x + a_{22}p'_y \end{array}$ also

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \end{pmatrix} = A\vec{p'}$$

Seien im $\mathbb{E}^3$ ein xyz-KS und ein $x'y'z'$-KS gegeben (zunächst) mit demselben Ursprung O.

Für einen Punkt P gilt dann:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= p_x \cdot \overrightarrow{OE_x} + p_y \cdot \overrightarrow{OE_y} + p_z \cdot \overrightarrow{OE_z} = \\ &= p'_x \cdot \overrightarrow{OE'_x} + p'_y \cdot \overrightarrow{OE'_y} + p'_z \cdot \overrightarrow{OE'_z} \end{aligned}$$

Sei nun

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OE'_x} &= a_{11}\overrightarrow{OE_x} + a_{21}\overrightarrow{OE_y} + a_{31}\overrightarrow{OE_z} \\
\overrightarrow{OE'_y} &= a_{12}\overrightarrow{OE_x} + a_{22}\overrightarrow{OE_y} + a_{32}\overrightarrow{OE_z} \qquad (*) \\
\overrightarrow{OE'_z} &= a_{13}\overrightarrow{OE_x} + a_{23}\overrightarrow{OE_y} + a_{33}\overrightarrow{OE_z}
\end{aligned}
$$

Dann ergibt sich nach Einsetzen

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} = (p'_x a_{11} + p'_y a_{12} + p'_z a_{13}) \cdot \overrightarrow{OE_x} &+ \\
+ (p'_x a_{21} + p'_y a_{22} + p'_z a_{23}) \cdot \overrightarrow{OE_y} &+ \\
+ (p'_x a_{31} + p'_y a_{32} + p'_z a_{33}) \cdot \overrightarrow{OE_z}&
\end{aligned}
$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$
\begin{aligned}
p_x &= a_{11}p'_x + a_{12}p'_y + a_{13}p'_z \\
p_y &= a_{21}p'_x + a_{22}p'_y + a_{23}p'_z \qquad (**) \\
p_z &= a_{31}p'_x + a_{32}p'_y + a_{33}p'_z
\end{aligned}
$$

Vergleich (*) mit (**):

(*) . . . **Basistransformation**
(**)...**Koordinatentransformation**(**KT**)
In (*) stehen die gestrichenen Größen links, in (**) rechts.
In (*) wird über den Index i bei a_{ik} summiert, in (**) über k.

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} \qquad (**)$$

kurz: $\vec{p} = A \cdot \vec{p}\,'$ bzw. $\vec{p'} = A^{-1}\vec{p}$ falls $\det(A) \neq 0$ (bijektive lineare Abbildung)

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{OE'_x} \\ \overrightarrow{OE'_y} \\ \overrightarrow{OE'_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{OE_x} \\ \overrightarrow{OE_y} \\ \overrightarrow{OE_z} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

In (*) steht A^T, wo in (**) A steht.

(*) und (**) nennt man **zueinander kontragredient**.

3.1.3 Wechsel von affinen KSen bei nicht notwendig gleichem Ursprung

Seien nun
ein affines xyz-KS und
ein affines $x'y'z'$-KS gegeben
mit Ursprung O bzw. O'.

Dann ist $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$,

also $\vec{p} = \vec{b} + A\vec{p}\,'$.

3.2 Kartesisches KS (Zur Erinnerung)

Ein affines xyz-KS im dreidimensionalen euklidischen Raum heißt ein **kartesisches KS** nach **Renatus (René) Cartesius** (1596 - 1650) (Cogito, ergo sum. Ich denke, also bin ich.) wenn gilt:
Die x-, die y- und die z-Achse sind paarweise zueinander orthogonal und
die drei Streckenlängen $d(O, E_x)$, $d(O, E_y)$ und $d(O, E_z)$ sind gleich lang.
Sind die drei Vektoren $\overrightarrow{OE_x}$, $\overrightarrow{OE_y}$ und $\overrightarrow{OE_z}$ (in dieser Reihenfolge) angeordnet wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand, so heißt das KS ein **Rechts-KS**, andernfalls ein **Links-KS**.

Durch Spiegelung an einer Ebene (z.B. der yz-Ebene) geht ein Rechts-KS in ein Links-KS über. Insofern ist die Wahl des Rechts-KS **geometrisch willkürlich**.
Beachte **Rechte-Hand-Regel:** Zeigt der Daumen in Richtung der Drehachse, so liefert das Abwinkeln der anderen Finger eine positive Drehung (Rechtsdrehung).
Physikalisch: Elektronen, die aus einem β-Zerfall stammen, sind immer links-zirkular polarisiert. (Lee, Yang und Wu)
Pharmazie: Bei der Herstellung von Contergan entstanden spiegelbildliche Moleküle (rechts- bzw. linksdrehend). Die einen waren unschädlich, die anderen fatalerweise nicht.

Ein affines xy-KS im zweidimensionalen euklidischen Raum (euklidische Ebene) heißt ein **kartesisches KS**, wenn gilt:
Die x- und die y- Achse sind zueinander orthogonal und
die zwei Streckenlängen $d(O, E_x)$, $d(O, E_y)$ sind gleich lang.
Geht der Vektor $\overrightarrow{OE_y}$ aus $\overrightarrow{OE_x}$ durch eine Drehung auf kürzestem Wege im mathematisch positiven Sinne hervor, so heißt das KS ein **Rechts-KS**,
andernfalls ein **Links-KS**.

Schaut man auf eine Ebene mit einem xy-KS, das ein Rechtssystem ist, von der anderen Seite, so wird das Rechtssystem zu einem Linkssystem.

Eine Drehung des Raumes um eine Achse erfolgt mit positivem Drehwinkel, wenn sie eine Rechtsdrehung ist.

Eine Drehung der Ebene um einen Punkt erfolgt mit positivem Drehwinkel, wenn sie eine Linksdrehung ist.

Warum?

Liegt ein Blatt Papier mit einem kartesischen xy-Rechts-KS auf einem Zeichentisch, so zeigt die zugehörige z-Achse nach oben.

Die Blickrichtung des Betrachters ist der z-Achse entgegengerichtet.

Was der Betrachter als Linksdrehung sieht, ist eine Rechtsdrehung um die orientierte z-Achse.

3.3 Homogene Koordinaten

Kann man Fernpunkten Koordinaten zuordnen? z.B. $(u \cdot \infty, v \cdot \infty) = (\infty, \infty)$
Das ist offenbar nicht sinnvoll!

3.3.1 Einführung homogener Koordinaten in der projektiven Ebene P^2

Homogene Punkt-Koordinaten in P^2
Betrachte Figur-3-3-1-a-homogene-PK

zunächst unter **aff**, dann unter **hom**

Wir betrachten die projektiv erweiterte euklidische Ebene P^2 als Ebene $x_0 = 1$ in einem $x_0x_1x_2$-Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ und ordnen dem Punkt $P(1, p_x, p_y)$ mit den **affinen Koordinaten** p_x, p_y **von P** im $\mathbb{R}^2$ die **homogenen Punkt-Koordinaten**

$$\vec{p} = p_0 \begin{pmatrix} 1 \\ p_x \\ p_y \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit dem}$$

homogenisierenden Faktor $p_0 \neq 0$ zu.

d.h. im $\mathbb{R}^3$ die Punkte der Geraden $OP \setminus \{O\}$. Die homog. PK sind nur bis auf einen Faktor $\neq 0$ bestimmt.

Aus den homogenen Koordinaten von P $\vec{p} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{o}\}$ (warum $\neq \vec{o}$?) erhält man für $p_0 \neq 0$ dessen **affinen Koordinaten** als

$$p_x = \frac{p_1}{p_0}, \ p_y = \frac{p_2}{p_0}$$

bzw. konstruktiv im $\mathbb{R}^3$ als Schnitt der Geraden durch O mit Richtung $\vec{p}$ mit der Ebene $x_0 = 1$. Für $p_0 = 0$ liegt diese Gerade parallel zur Ebene $x_0 = 1$, schneidet also diese Ebene projektiv gesehen im Fernpunkt der Richtung $\vec{p}$.

Im Fall $p_0 = 0$ liegt also ein **Fernpunkt** in Richtung $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vor.

Betrachte Figur-3-3-1-b-affin-homogen

Homogene Geraden-Koordinaten in P^2
Betrachte Figur-3-3-1-c-homogene-GK

Die Verbindungsgerade $g = PQ$ $(P(\vec{p}) \neq Q(\vec{q}) \Leftrightarrow \vec{p},\ \vec{q}\ l.u.)$ entsteht in obigem Modell als Schnitt der von $\vec{p}$ und $\vec{q}$ aufgespannten Ebene $\gamma = OPQ$ mit der Ebene $x_0 = 1$.

Die Gerade OX zu einem Punkt $X(\vec{x}) \in g$ liegt in der Ebene $\gamma \subset \mathbb{R}^3$. Die homogenen Punkt-Koordinaten $\vec{x}$ von $X \in g$ sind also:
1) eine Linearkombination von $\vec{p}$ und $\vec{q}$

$g : \vec{x} = u\cdot\vec{p} + v\cdot\vec{q}$ mit $u, v \in \mathbb{R}, (u, v) \neq (0, 0)$
Parameterdarstellung von $g = PQ$.

Für $p_0 = 1 = q_0$ und $u = 1 - v$ erhält man die Punktrichtungsform von g: $\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix},\ v \in \mathbb{R}$.

2) orthogonal zur Normalen $\vec{n} = \vec{p} \times \vec{q}$ der Ebene $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ durch O

$g : \vec{n} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow n_0x_0 + n_1x_1 + n_2x_2 = 0$ **(*)**

Koordinatengleichung von $g = PQ$.
Sie ist **homogen** in x und in n, d.h.: Mit $\vec{x}$ bzw. $\vec{n}$ erfüllen auch Vielfache $\neq 0$ davon die Gleichung **(*)**.
$\vec{n} = \vec{p} \times \vec{q} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{o}\}$ sind die **homogenen Geraden-Koordinaten** von g. Sie sind (wie die homogenen Punkt-Koordinaten) nur bis auf Vielfache $\neq 0$ bestimmt.

Einschub: Man erhält **(*)** auch ohne Zuhilfenahme des Skalarprodukts direkt als Matrizenprodukt $\vec{n}^T\vec{x} = 0$ wie folgt:

$X(\vec{x}) \in g \Leftrightarrow \vec{x} = u\vec{p} + v\vec{q}$ (homog. Koord. von X)

$\Leftrightarrow \vec{x}, \vec{p}, \vec{q}$ sind in $\mathbb{R}^3$ **linear abhängig**

$\Leftrightarrow \det(\vec{x},\vec{p},\vec{q}) = 0 \overset{(DE)}{\Leftrightarrow} (\vec{p} \times \vec{q})^T\,\vec{x} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{n}^{\,T}\vec{x} = 0$ mit $\vec{n} := \vec{p} \times \vec{q} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{o}\}$

$\Leftrightarrow g :\ n_0x_0 + n_1x_1 + n_2x_2 = 0 \quad (*)$.

Für (DE) siehe Figur-3-3-1-d-Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$, beachte insbesondere die Determinantenentwicklung nach 1.Spalte.
Es gilt allgem. für 3x3-Matrizen: $\det(\vec{x},\vec{p},\vec{q}) = \vec{x}^T(\vec{p} \times \vec{q})$,.

Gleichung der Ferngeraden: $x_0 = 0$.

(Vektorprodukt zweier Fernpunkte mit homogenen l.u. PK $\vec{p}$, $\vec{q}$ mit $p_0 = 0$ und $q_0 = 0$ liefert $\vec{p} \times \vec{q} = (p_1q_2 - q_1p_2, 0, 0)^T$.)

Mit der **Transformation** $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$ erhält man aus der Gleichung von $g(\neq FG)$ in **homogenen Koordinaten**:

$$g : n_0 x_0 + n_1 x_1 + n_2 x_2 = 0 \quad \text{(homog. GL)}$$

durch Division mit x_0 die Gleichung von $g(\neq FG)$ in **affinen Koordinaten**:

$$g : n_0 + n_1 x + n_2 y = 0 \quad \text{(affine Gl).}$$

umgekehrt durch Einsetzen der TF und Multiplikation mit x_0

$(0, n_2, -n_1)^T$ sind die homogenen Punkt-Koordinaten des Fernpunkts von $g \neq FG$.

Vorteil homogener Koordinaten in der projektiven Ebene P^2: Figur-3-3-1-e

Rechnung mit homogenen Koordinaten im $\mathbb{R}^3$ und Vektorprodukt unter Einbeziehung der Fernpunkte und der Ferngerade.

Die homogenen Geradenkoordinaten der Verbindungsgerade $g = PQ : \vec{n}^T \vec{x} = 0$ zweier Punkte $P(\vec{p})$ und $Q(\vec{q})$ erhält man als $\vec{n} = \vec{p} \times \vec{q}$ (Lösung des LGS $\begin{matrix} \vec{n}^T \vec{p} = 0 \\ \vec{n}^T \vec{q} = 0 \end{matrix}$)

Beachte: $P \neq Q \;\Leftrightarrow\; \vec{p}, \vec{q}$ linear unabhängig $\Leftrightarrow\; \vec{n} = \vec{p} \times \vec{q} \neq \vec{o}$.

Umgekehrt erhält man die homogenen Punktkoordinaten des Schnittpunkts $S(\vec{s})$ zweier Geraden $\begin{matrix} g_a : \vec{a}^T \vec{x} = 0 \\ g_b : \vec{b}^T \vec{x} = 0 \end{matrix}$ als $\vec{s} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Beachte: $g_a \neq g_b \;\Leftrightarrow\; \vec{a}, \vec{b}$ linear unabhängig $\Leftrightarrow\; \vec{s} = \vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{o}$.

3.3.2 Einführung homogener Koordinaten im projektiven Raum P^3

Die Einführung homogener Koordinaten erfolgt im P^3 analog zum P^2 durch Einbetten des P^3 im $x_0x_1x_2x_3$-Koordinatensytem des $\mathbb{R}^4$ als 3-dim. Raum mit $x_0 = 1$ (allgem. des P^n im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $x_0 = 1$), also durch Hinzunahme der homogenisierenden Koordinate x_0, wobei die **homogenen Koordinaten** $\vec{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3)^T \in \mathbb{R}^4 \backslash \{\vec{o}\}$ eines Punktes P nur bis auf einen **homogenisierenden Faktor** $\rho \neq 0$ bestimmt sind.

Für $p_0 \neq 0$ erhält man die **affinen Koordinaten** von P (im 3-dim. Unter-Raum $x_0 = 1$) als

$$p_x = \frac{p_1}{p_0},\ p_y = \frac{p_2}{p_0},\ p_z = \frac{p_3}{p_0}.$$

Im Fall $p_0 = 0$ liegt ein Fernpunkt vor, d.h. der Schnittpunkt aller zur Richtung $\vec{p}$ parallelen Geraden in $x_0 = 1$.

Behandlung von Geraden und Ebenen des P^3 in homogenen Koordinaten in Kapitel 4.1.2.

3.3.3 Projektivitäten

(nachgeholte Definition zu 2.2.8)

Eine Projektivität π des P^n ($n = 2$, 3 oder $n \in \mathbb{N}$) ist eine bijektive lineare Abbildung

$$\pi : \begin{cases} P^n & \to & P^n \\ X(x_0, x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & X'(x'_0, x'_1, \ldots, x'_n) \end{cases},$$

die in homogenen Koordinaten gegeben ist durch

$$\vec{x}\,' = A\vec{x}$$

mit einer $(n+1) \times (n+1)$-Matrix A mit $\det A \neq 0$ (regulär) und

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{\vec{o}\}$$

Da die homogenen Koordinaten nur bis auf einen homogenisierenden Faktor $\neq 0$ bestimmt sind, ist auch A nur bis auf einen Faktor $\neq 0$ bestimmt.

Ausführlicher in P^3: $\vec{x}\,' = A\vec{x}$ mit
$\vec{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T, \vec{x}\,' = (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)^T$

$$\text{und} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$x'_0 = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3$$
$$x'_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$
$$x'_2 = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$
$$x'_3 = a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

Die ausführliche Darstellung im P^2 erhält man durch Streichen der letzen Zeile und der letzen Spalte.

Projektivitäten sind (als lineare Abbildungen) geradentreu (also Kollineationen) und damit DV-treu. (o. Bew.)

Zusatz: (fakultativ)
Entzerrung eines Fotos mit Hilfe einer Projektivität oder des Doppelverhältnisses
Figur-3-3-3-Entzerrung

Bei der Projektivität schiebe P in A, B, C, D auf (7,-5) oder in die Fernpunkte $(0,1,2)^T$ oder $0,3,2)^T$.

3.3.4 **Affinitäten** (siehe 2.2.8)

Die Menge der Fernpunkte des P^n in bleibt in 3.3.3 fest $\iff$ $(x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0' = 0)$
$\iff$ $a_{01} = a_{02} = \ldots = a_{0n} = 0.$

Betrachte im P^3 die Bilder von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Wegen $\det A \neq 0$ ist dann $a_{00} \neq 0$.

Da $\vec{x}$, $\vec{x}\,'$ homogene Koordinatenvektoren sind, kann man A ersetzen durch

$$\frac{1}{a_{00}}A.$$

Für $n = 3$:

$$\frac{1}{a_{00}}A = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{30} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right)$$

Der Übergang zu affinen Koordinaten $\vec{p}$, $\vec{p}\,'$ für eigentliche Punkt X, X' ($\vec{p}$, $\vec{p}\,' \in \mathbb{R}^n$)

$$\frac{1}{x_0}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{x_0'}\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{p}\,' \end{pmatrix},$$

liefert:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vec{p}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{o}^T \\ \vec{b} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

oder kurz (im $\mathbb{R}^n$)

$$\vec{p}' = B\vec{p} + \vec{b}$$

Vgl. bijektive affine Abbildung des $\mathbb{R}^n$ oder 3.1.3 (Basis-/Koordinatenwechsel)

mit $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_{10} \\ \vdots \\ b_{n0} \end{pmatrix}$ (vgl. 1.Spalte von $\frac{1}{a_{00}}A$),

und einer $n \times n$-Matrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \ \det(B) \neq 0.$$

Für $n = 3$:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_{10} \\ b_{20} \\ b_{30} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \ \det(B) \neq 0.$$