Geometrie LB Übungen Blatt 11

Notiztitel 16.12.2014

T26. $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + t\sin t \\ \sin t - t\cos t \end{pmatrix}, t>0 \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) =$, $\ddot{\vec{x}}(t) =$

$\Rightarrow |\dot{\vec{x}}(t)| =$ $\Rightarrow \vec{t}(t) = \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|} =$ $\perp \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \vec{n}(t)$

Frenet 2 Bein $\vec{t} \perp \vec{n}$ mit $\det(\vec{t}, \vec{n}) = 1$ rechts ONB !

$\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}) = \det\Big(\qquad \Big) =$

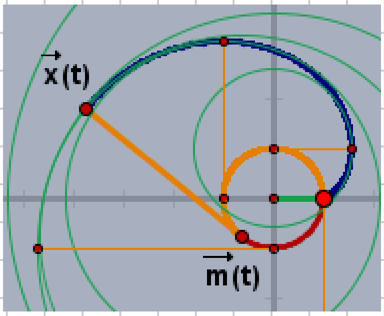
$\frac{1}{t}$-faches abziehen t·t ausklammern

$\Rightarrow \kappa(t) = \frac{\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}})}{|\dot{\vec{x}}|^3} =$ $\Rightarrow$ Krümmungskreismittelpunkt

$\vec{m}(t) = \vec{x}(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \cdot \vec{n}(t) =$

Evolute von c ist ein Kreis K um O mit Radius 1.
Umgekehrt ist c eine Kreisevolvente (t = Bogenlänge von K)

$\vec{x}(t) = \vec{m}(t) + (t_0 - t) \cdot \dot{\vec{m}}(t)$



o.E. $t_0 = 0$

Alternative Berechnung der Krümmung $\kappa(t)$ mit Hilfe der Frenet-Ableitungsgleichungen
$\vec{t}'(s) = \kappa(s) \cdot \vec{n}(s)$
$\vec{n}'(s) = -\kappa(s)\, \vec{t}(s)$
mit Bogenlänge s ?

Betrachte $\vec{y}(s) = \vec{x}(t(s)) \Rightarrow \vec{y}'(s) = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \vec{t}(t(s))$

$|\vec{y}'(s)| = 1 \quad \forall s$

$\Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\dot{\vec{x}}(t)|} = \frac{1}{t}$ und

$\vec{t}'(s) = \frac{d\vec{t}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{= \vec{n}(t(s))} \cdot \underline{\frac{dt}{ds}} = \underline{\kappa(t(s))} \cdot \vec{n}(t(s)) \Rightarrow \underline{\kappa(t) = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{t}}$

T27. $\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u \sin v \\ \sqrt{2}\,u \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$

a) <u>u-Linien</u> $(v = v_0 = \text{const})$ $\quad \underbrace{\vec{x}(u,v_0) = \qquad}_{= \vec{r}}$ Geraden durch Ursprung O mit Richtung $\vec{r}$

<u>v-Linien</u> $(u = u_0 = \text{const})$ $\quad \vec{x}(u_0, v) =$ Kreis um z-Achse mit Radius u_0 in Ebene $z = \sqrt{2}\,u_0$

$\Rightarrow$ Φ ist Drehfläche um z-Achse mit geradlinigem Meridian. (u-Linien)

$$\vec{x}(u,v) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix um z-Achse mit Winkel } v} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ 0 \\ \sqrt{2}\,u \end{pmatrix}}_{\text{Kurve in xz-Ebene, Kurvenparameter } u} = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ \sqrt{2}\,u \end{pmatrix}$$

Kurve in xz-Ebene = Meridian hier: Gerade

$\Rightarrow$ Φ ist ein Drehkegel um z-Achse, Spitze O.

b) Φ regulär $\Leftrightarrow$ $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ linear unabhängig $\forall (u,v)$

$\Leftrightarrow \vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq \vec{0} \;\; \forall (u,v) \Leftrightarrow (\vec{x}_u \times \vec{x}_v)^2 \neq 0 \;\; \forall (u,v)$

$\vec{x}_u = \qquad\qquad , \; \vec{x}_v = \qquad\qquad$ $\Rightarrow$ Für $u \neq 0$ gilt: $\lambda \vec{x}_u + \mu \vec{x}_v = 0 \overset{\text{3. Komp.}}{\Leftrightarrow} \lambda = 0, \; \mu = 0$

Tgte an u-Linie, Tgte an v-Linie $\Rightarrow$ $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ sind für $u \neq 0$ lin. unabh.

<u>2. Weg:</u> $\vec{x}_u \times \vec{x}_v =$ $\qquad\qquad$ für $u \neq 0$ (Kegelspitze O ist einziger singulärer Pkt)

$\Phi|_G$ ist nicht einfach, da für $v \in \mathbb{R}$ die Breitenkreise (v-Linien) mehrfach durchlaufen werden $\Rightarrow$ Einschränkung auf

$\tilde{G} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0, \; -\pi \leq v < \pi\}$ liefert einfache Fläche.

c) $u = e^t, \; v = t \Rightarrow \vec{y}(t) := \vec{x}(u(t), v(t)) = \qquad\qquad \Rightarrow \dot{\vec{y}}(t) =$

$\Rightarrow$ c ist regulär $\forall t \in \mathbb{R}$ $\qquad$ Φ regulär d.h. $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ sind lin. unabh.

<u>2. Weg:</u> $\dot{\vec{y}}(t) \overset{\text{Kettenregel}}{=} \vec{x}_u \dot{u} + \vec{x}_v \dot{v} \neq \vec{0} \Leftrightarrow (\dot{u}, \dot{v}) =$

d) $s = \int \sqrt{\dot{\vec{y}}(t)^2}\,dt = \int \sqrt{(\vec{x}_u \dot{u} + \vec{x}_v \dot{v})^2}\,dt =$

mit $\underbrace{\vec{x}_u^{\,2}}_{g_{11}} =$, $\underbrace{\vec{x}_u \vec{x}_v}_{g_{12}} =$, $\underbrace{\vec{x}_v^{\,2}}_{g_{22}} =$ und $\dot{u} =$, $\dot{v} =$ $\Rightarrow$ metrische Fundamentalgrößen

$s = \int$

2. Weg: direkt $\dot{\vec{y}}(t)^2 = e^{2t}\cdot(1+1+2) = 4e^{2t} \Rightarrow |\dot{\vec{y}}(t)| = 2e^{t}$ (*)

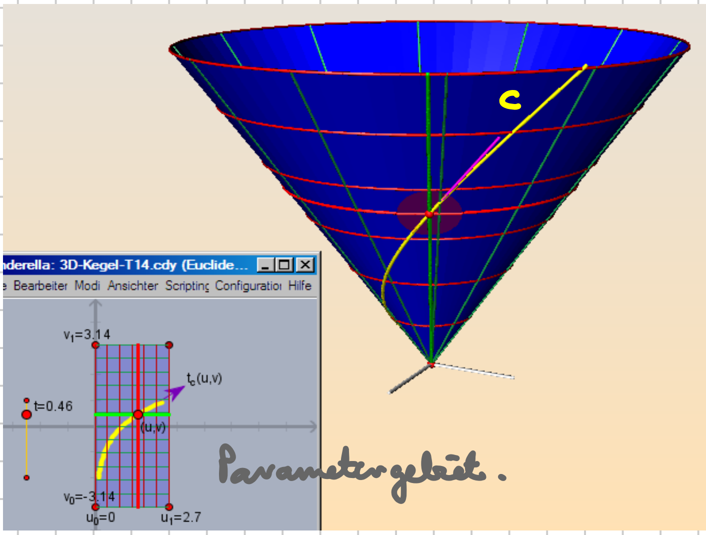
e) Winkel φ von c zu u-Linie ($v = v_0 = \text{const}$): $\varphi = \sphericalangle(\dot{\vec{y}}, \vec{x}_u)$

Tgte an c Tgte an u-Linie

$$\cos\varphi = \frac{\dot{\vec{y}}\cdot\vec{x}_u}{|\dot{\vec{y}}||\vec{x}_u|} =$$

Zu T27:

Drehkegel mit Parameterlinien, Flächenkurve und deren Tangente in $\vec{x}(u(t), v(t))$.



Parametergebiet.