

## 4.3 Euklidische Geometrie mit Skalarprodukt und Vektorprodukt

### 4.3.1 Zerlegung einer Kraft, Skalarprodukt

Figur-4-3-1-Skalarprodukt (physikalisch)

Figur: Wagen wird mit einer Schnur schräg nach oben auf horizontaler Bahn gezogen: Kraft  $\vec{F}$ , Fahrtrichtung  $\vec{s}$ .

Die Kraft, die den Wagen in Richtung  $\vec{s}$  zieht, hat den Betrag

$$\pm |\vec{F}| \cos \varphi \text{ mit } \varphi = \angle(\vec{F}, \vec{s}).$$

Die verrichtete Arbeit ist Kraft mal Weg

$$|\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \varphi =: \vec{F} \circ \vec{s}$$

und liefert ein Produkt  $\circ$  für Vektoren  $\vec{F}, \vec{s}$

Offenbar gilt:

**1) Symmetrie:**  $\vec{F} \circ \vec{s} = \vec{s} \circ \vec{F}$

$$\vec{F} \circ \vec{s} = |\vec{s}| \cdot |\vec{F}| \cos \varphi = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos \varphi = \vec{s} \circ \vec{F}$$

$|\vec{s}|$ -mal ( $\pm$  die Länge der Normalprojektion von  $\vec{F}$  auf eine Gerade mit Richtung  $\vec{s}$ ) und

$|\vec{F}|$ -mal ( $\pm$  die Länge der Normalprojektion von  $\vec{s}$  auf eine Gerade mit Richtung  $\vec{F}$ )  $\Rightarrow$

2) **Othogonalität:**  $\vec{F} \circ \vec{s} = 0$

$\Leftrightarrow (\vec{F} = \vec{o} \text{ oder } \vec{s} = \vec{o} \text{ oder } \vec{F} \perp \vec{s})$

3) **Linearität/Distributivität:**

a)  $(\lambda \cdot \vec{F}) \circ \vec{s} = \lambda \cdot (\vec{F} \circ \vec{s})$

Warum gilt das auch für negative  $\lambda$ ?

b)  $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \circ \vec{s} = \vec{F}_1 \circ \vec{s} + \vec{F}_2 \circ \vec{s}$

Betrachte  $\vec{s} \parallel$  Zeichenebene, dann sind Risse von Lotebenen zu  $\vec{s}$  projizierend.

3) **Positive Definitheit:**

$\vec{F} \circ \vec{F} = |\vec{F}|^2 \geq 0$  und  $\vec{F} \circ \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = \vec{o}$ .

o ist somit eine positiv definite Bilinearform (**BLF**), also ein **Skalarprodukt** der beiden Vektoren  $\vec{F}$  und  $\vec{s}$  im Sinn der LA.

Schreibweisen:

$$\vec{F} \circ \vec{s} =: \langle \vec{F}, \vec{s} \rangle =: \vec{F} \cdot \vec{s} =: \vec{F}\vec{s}.$$

$$\vec{F}^2 := \vec{F} \circ \vec{F} = |\vec{F}|^2$$

### 4.3.2 Kanonische Darstellung im $\mathbb{R}^3$

Sei  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  eine Orthonormalbasis (**ONB**), d.h.

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3 \perp \vec{e}_1$$

und

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$$

Dann gilt für Vektoren  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  :

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$$

mit  $x_i, y_i \in \mathbb{R} (i = 1, 2, 3)$  nach obiger BLF

$$\vec{x} \circ \vec{y} = \vec{x}\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3. \quad \Rightarrow$$

Sind  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$  Koordinatenvektoren **bezüglich einer ONB (!)**, so ist das **Skalarprodukt** von  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$

$$\vec{x}\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \vec{x}^T \vec{y} = \vec{y}^T \vec{x}.$$

### 4.3.3 Norm und Winkel im $\mathbb{R}^n$

$$\|\vec{x}\| := |\vec{x}| := \sqrt{\vec{x}^2}$$

heißt die **Länge** oder die **Norm** oder der **Betrag** von  $\vec{x}$  und für den **Winkel** zwischen  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  gilt:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{x} \circ \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|} \quad \text{mit } \varphi = \angle(\vec{x}, \vec{y}).$$

$$p = \vec{y} \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \quad (= |\vec{y}| \cos \varphi)$$

ist die **Normalprojektion** p von  $\vec{y}$  auf  $\vec{x}$

### 4.3.4 Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

$\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ . Dann definiert man:

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{w} &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} := \\ &:= \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} v_3 & w_3 \\ v_1 & w_1 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Das ist das **Vektorprodukt** oder **Kreuzprodukt** (oder **äußere Produkt**) der Vektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$ ,

das wir in Figur-4-1-1-Vektorprodukt aus dem Determinantenentwicklungssatz von Laplace gewonnen haben.

Für alle  $\vec{x}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$  gilt:

$$\det(\vec{x} \vec{v} \vec{w}) = \vec{x}^T (\vec{v} \times \vec{w})$$

**Satz:** Für alle  $\vec{x}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$  ist

$$\vec{x}^T (\vec{v} \times \vec{w})$$

das (orientierte) Volumen des von  $\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}$  aufgespannten **Spats = Parallelepipeds**.

Siehe Figur-4-3-4-Spatprodukt

Daraus folgt speziell:

$$\vec{v}^T(\vec{v} \times \vec{w}) = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_1 & w_1 \\ v_2 & v_2 & w_2 \\ v_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (*)$$

und

$$\vec{w}^T(\vec{v} \times \vec{w}) = 0 \quad (**)$$

Aus (\*) und (\*\*) folgt

**Satz:** Für alle  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$  gilt:

$$\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{v}, \vec{w}.$$

Wählt man für  $\vec{x}$  speziell einen Einheitsvektor in Richtung von  $\vec{v} \times \vec{w}$ , so ist

$$\vec{x}^T(\vec{v} \times \vec{w})$$

1-mal die (orientierte) Grundfläche des von  $\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}$  aufgespannten Spats. Daher gilt:

**Satz:** Für alle  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ , die Koordinatenvektoren bezüglich einer ONB sind, ist

$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| \quad (= |\vec{v}||\vec{w}|\sin\varphi \text{ mit } \varphi = \angle(\vec{v}, \vec{w}))$$

die Fläche des von  $\vec{v}, \vec{w}$  aufgespannten Parallelogramms.

Vgl. Figur-4-3-4-Vektorprodukt

**Satz:** Für alle  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$  gilt:

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$$

**Bew.:** Definition anschauen!

**Satz:** Für alle  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$  gilt:

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$$

**Bew.:** nachrechnen!

**Satz:** Für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  und für alle  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$  gilt:

$$(\lambda \vec{v}) \times \vec{w} = \lambda \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

**Bew.:** Definition anschauen!

**Satz:** Sind  $\vec{v}, \vec{w}$  Koordinatenvektoren bzgl. einer ONB, so gilt die **Identität von Lagrange**:

$$\|\vec{v} \times \vec{w}\|^2 + (\vec{v} \circ \vec{w})^2 = \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2$$

Figur-4-3-4-LagrangeIdentität (analyt.)

$$\begin{aligned} \|\vec{v} \times \vec{w}\|^2 &= \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 - (\vec{v} \circ \vec{w})^2 = \\ &= \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 \cos^2 \angle(\vec{v}, \vec{w}) = \\ &= \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 \sin^2 \angle(\vec{v}, \vec{w}) \end{aligned}$$

Vgl. Flächeninhalt der Parallelogramms, das von  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  aufgespannt wird. Figur-4-3-4-Vektorprodukt zeigt bereits eine geom. Herl. der Lagrangeidentität.

Eine geometrische Interpretation, wenn  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  Koordinatenvektoren bezüglich einer ONB:

$\vec{v} \times \vec{w}$  ist ein Vektor  $\perp \vec{v}, \vec{w}$

mit der Länge  $\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin \angle(\vec{v}, \vec{w})$ .

Davon gibt es zwei!

Von jetzt an werde eine Rechts-ONB vorausgesetzt. Dann gilt allgemein:

$$\vec{x}^T(\vec{v} \times \vec{w}) = \det(\vec{x} \vec{v} \vec{w}) = \det(\vec{v} \vec{w} \vec{x}) > 0 \Leftrightarrow$$

$\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$  bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem. Daraus folgt:

$$\det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{v} \times \vec{w})^2 = \|\vec{v} \times \vec{w}\|^2 > 0$$

falls  $\vec{v}, \vec{w}$  l.u.

**Satz:**  $\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w}$  bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem, falls  $\vec{v}, \vec{w}$  l.u.

### 4.3.5 Beispiele (bzgl. kart. Rechts-KSe)

a) Geraden  $g : \vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$   
 $h : \vec{x} = \vec{b} + s\vec{w}, \quad s \in \mathbb{R}$

$g$  nicht parallel zu  $h$

**Ges.:** Abstand  $d(g, h)$

**Beh.:**  $d(g, h) = \frac{|\det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{b} - \vec{a})|}{|\vec{v} \times \vec{w}|}$

Warum?

Figur-4-3-5-a-AbstandGeraden

Blickrichtung  $\perp \vec{v} \times \vec{w}$ ,

Blickrichtung nicht parallel zu  $g$ ,  
nicht parallel zu  $h$

Dann sieht man  $g$  und  $h$  zueinander parallel

$d(g, h) = |\text{Normalprojektion von } \vec{b} - \vec{a} \text{ auf } \vec{v} \times \vec{w}|$

$$= |(\vec{b} - \vec{a}) \frac{\vec{v} \times \vec{w}}{|\vec{v} \times \vec{w}|}| = \frac{|\det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{b} - \vec{a})|}{|\vec{v} \times \vec{w}|}$$

b)  $\Delta A(\vec{a})B(\vec{b})C(\vec{c})$  im dreidim. Raum

**Ges.:** Dreiecksfläche  $F$ .

**Beh.:**  $F = \frac{1}{2}|(\vec{c} - \vec{a}) \times (\vec{b} - \vec{a})|$

Warum?

Figur-4-3-5-b-Dreiecksfläche

Blickrichtung  $\perp ABC$

Zwei Deutungen:

halbe Parallelogrammfläche nach obigem Satz oder

Länge einer Höhe ist  $|\vec{c} - \vec{a}| \sin \angle(\vec{c} - \vec{a}, \vec{b} - \vec{a})$

wegen  $|(\vec{c} - \vec{a}) \times (\vec{b} - \vec{a})| = |\vec{c} - \vec{a}| |\vec{b} - \vec{a}| \sin \angle(\vec{c} - \vec{a}, \vec{b} - \vec{a})$ .



c)  $\Delta A(\vec{a})B(\vec{b})C(\vec{c})$  in der Ebene

**Ges.:** Dreiecksfläche  $F$ .

$$\mathbf{Beh.:} \quad F = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Warum? (Sind das homogene Koordinaten?)

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vec{a} & \vec{b} - \vec{a} & \vec{c} - \vec{a} \end{pmatrix} \\ &= \det(\vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{a}) \quad (**) \end{aligned}$$

Mit Spalten der Determ. gilt nach **b)**

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} \det(\vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{a}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \\ &= \frac{1}{2} |\det(\vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{a})| \end{aligned}$$

**Anmerkung:** (\*) liefert eine **orientierte Dreiecksfläche**.

Daher werden die Formeln (\*) bzw. (\*\*) oft genutzt.

## d) Brennpunkte von Ellipsen

**Geg.:** Zwei Pkte  $F_1, F_2, F_1 \neq F_2$ , in der euklid. Ebene

**Ges.:** Menge aller Pkte  $X(x, y)$ , für die gilt:

$$d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$$

mit  $a \in \mathbb{R}$  fest

Skizze mit kart.  $xy$ -KS,

$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$  mit  $c > 0, X(x, y)$

Notwendig:  $2a \geq d(F_1, F_2)$

$$2a = d(X, F_1) + d(X, F_2) =$$

$$= \sqrt{(x - (-c))^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$(2a - \sqrt{(x - (-c))^2 + y^2})^2 = (\sqrt{(x - c)^2 + y^2})^2$$

$$4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2 =$$

$$= (x - c)^2 + y^2$$

$$4a^2 + 4xc = 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} \quad | : 4 \text{ dann } \uparrow 2$$

$$a^4 + 2a^2xc + x^2c^2 = a^2((x + c)^2 + y^2)$$

Weitere Umformung ergibt:

$$a^4 + x^2c^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^2 \underbrace{(a^2 - c^2)}_{=:b^2} = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 \quad | : a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Die gesuchte Punktmenge ist eine **Ellipse**  
*e*.

Was ist *b*?

Figur-4-3-5-c-Gärtnerkonstruktion

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ (Pythagoras)}$$

*b* ist die **kleine Halbachse** von *e*

*a* ist die **große Halbachse** von *e*

$F_1, F_2 \dots$  **Brennpunkte** von *e*

Wie gezeigt liefert die **Gärtnerkonstruktion** mit zwei Pflöcken  $F_1, F_2$  und einer von  $F_1$  über *X* nach  $F_2$  gespannten Schnur der Länge  $2a$  Punkte einer Ellipse.

**Mitteilung** ohne Beweis:

Der Scheitelkrümmungskreis einer Ellipse  
in einem  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Haupt} \\ \text{Neben} \end{array} \right\}$ scheitel hat den  
Radius  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{b^2}{a} \\ \frac{a^2}{b} \end{array} \right\}$ .

Krümmungskreisconstruction siehe  
Figur-4-3-8-c-Gärtnerconstruction  
**Schritte 10-13**

Gedächtnisstütze: Dimension Länge!

Die Außenwinkelhalbierende des Dreiecks  
 $\Delta F_1XF_2$  in  $X$  ist die Tangente an die El-  
lipse im Punkt  $X$ .