5 Zur Geometrie euklidischer Bewegungen

5.1 Bewegungen

Eine Affinität α eines euklidischen Raumes heißt eine **Bewegung**, wenn sie Abstände (und damit auch Winkel) erhält, wenn also für alle Punkte X, Y gilt:

$$d(\alpha(X), \alpha(Y)) = d(X, Y).$$

Behauptung:
Liegt einem euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ ein kartesisches KS zugrunde, so ist eine Affinität $\alpha : X \mapsto X'$ mit

$$\vec{x}\,' = U\vec{x} + \vec{w}, \quad n \times n - \text{Matrix } U,\ \vec{w} \in \mathbb{R}^n$$

eine Bewegung, wenn U **orthogonal** ist, wenn also gilt:

$$U^T U = E \qquad \text{(Einheitsmatrix } E\text{).}$$

Für $U{=}E$ ist α eine Translation $\vec{x}\,' = \vec{x}+\vec{w}$.
det$(U) > 0$ . . . **gleichsinnige Bewegung**
det$(U) < 0$ . . . **ungleichsinnige Bewegung, Umlegung**

Beweis:
Betrachte α ohne Translation, d.h. $\vec{w} = \vec{o}$ d.h. Ursprung O ist ein Fixpunkt O'=O.
Für die Bilder $E_i'(\vec{e}\,'_i)$ der Einheitspunkte $E_i(\vec{e}_i)$ auf den Koordinatenachsen muss mit dem Skalarprodukt $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T\vec{y}$ gelten:

$$\delta_{ij} = \vec{e}_i^{\,T}\vec{e}_j = \vec{e}\,'^{T}_i\vec{e}\,'_j = \vec{e}_i^{\,T}U^TU\vec{e}_j = \vec{e}_i^{\,T}A\vec{e}_j = a_{ij}$$

für alle $i, j, 1 \leq i, j \leq n$ d.h. $A := U^TU = E$.

Folgerungen:
$U^TU = E \Rightarrow$
Die Spalten von U sind orthonormiert.
$U^TU = E \Rightarrow U^T = U^{-1} \Rightarrow UU^T = E \Rightarrow$
Die Zeilen von U sind orthonormiert.

$U^TU = E \Rightarrow \det(U^TU) = \det(E) = 1.$
Mit dem Determinantenmultiplikationssatz folgt: $\det(U^T)\det(U) = 1.$
Folglich gilt:

$$U^TU = E \Rightarrow \det(U) = \pm 1.$$

Die Umkehrung gilt nicht! Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Beispiel: Im $\mathbb{R}^3$: $U = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

5.2 Euklidische Bewegungen in der Dimension $n = 1$ und $n = 2$

$n = 1 \Rightarrow U = (1)$ oder $U = (-1)$.

$n = 2$:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}; \;\; U^T U = E \Rightarrow$$

$u_{11}^2 + u_{21}^2 = 1 \Rightarrow -1 \leq u_{11} \leq 1 \Rightarrow$
Wähle $u_{11} = \cos\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi \;\Rightarrow$
$u_{21} = \pm \sin\varphi$.

Figur-5-2-SinCosGraphen

Da im Fall $u_{21} = -\sin\varphi$ für $\psi := 2\pi - \varphi$
gilt: $\begin{array}{rcl} \cos\psi = & \cos\varphi & = u_{11} \\ \sin\psi = & -\sin\varphi & = u_{21} \end{array}$,
kann man φ so wählen, dass gilt:

$$u_{11} = \cos\varphi \,, \;\; u_{21} = \sin\varphi.$$

Weiter:
$U^T U = E \Rightarrow u_{11}u_{12} + u_{21}u_{22} = 0 \Leftrightarrow$
$u_{12}\cos\varphi + u_{22}\sin\varphi = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

mit $t = \pm 1$ (da $u_{12}^2 + u_{22}^2 = 1$).

Für $\mathbf{t=1} \Rightarrow U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (*)$

... **Drehmatrix**

Eigenvektoren/Eigenwerte?

$\det(U-\lambda E) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{pmatrix}$

$= \cos^2\varphi - 2\lambda\cos\varphi + \lambda^2 + \sin^2\varphi =$

$= \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1 = 0 \quad \Rightarrow$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\cos\varphi \pm \sqrt{4\cos^2\varphi - 4}}{2} =$$

$$= \cos\varphi \pm \sqrt{-\sin^2\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi =$$

$$= e^{\pm i\varphi} \quad \textbf{Formel von Euler}$$

Satz: $\pm\varphi$ im EW $e^{i\varphi}$ einer Drehmatrix (*) ist der zugehörige Drehwinkel. Einziger Fixpunkt der **Drehung** $\vec{x}\,' = U\vec{x}$ ist der Ursprung O (Gleichsinnige Bewegung).

$\det(U) = 1$, vgl. Figur-5-2-EbeneBewegungen mit t=1.

Für $\mathbf{t=-1} \Rightarrow U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \quad (**)$

... **Spiegelungsmatrix**

Eigenvektoren/Eigenwerte?

$\det(U-\lambda E) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi - \lambda & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi - \lambda \end{pmatrix}$

$= -\cos^2\varphi + \lambda^2 - \sin^2\varphi = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1.$$

Den Eigenvektor (EV) $\vec{x} \neq \vec{o}$ zum Eigenwert (EW) $\lambda_1 = +1$ erhält man aus:

$$U\vec{x} = \vec{x} \ \Leftrightarrow \ (U - E)\vec{x} = \vec{o} \ \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{cccccc} (\cos\varphi - 1) & x_1 & + & \sin\varphi & x_2 & = 0 \\ \sin\varphi & x_1 & - & (\cos\varphi + 1) & x_2 & = 0 \end{array}$$

Zweite Zeile: $x_1 = \cos\varphi + 1, x_2 = \sin\varphi$ ist eine Lösung.
Erste Zeile: ist auch erfüllt (nachrechnen).

Da die Abbildung $\vec{x}\,' = U\vec{x}$ Vielfache von $\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi + 1 \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ auf sich abbildet folgt:

Satz: Bei einer **Spiegelung** der Ebene mit der Abbildungsmatrix (**) hat die **Spiegelungsachse** (Fixpunktgerade) den Richtungsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi + 1 \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$.
Der Vektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi + 1 \end{pmatrix} \perp \vec{r}$ (EV zum EW $\lambda_2 = -1$) gibt die Richtung der (zueinander parallelen) Verbindungsgeraden (Fixgeraden) von Punkten zu ihren Bildpunkten an (Gegensinnige Bewegung).

$\det(U) = -1$; $U\vec{s} = -\vec{s}$ nachrechnen, vgl.

Figur-5-2-EbeneBewegungen mit t=-1.

Welchen Winkel schließt die Spiegelungsachse mit der x_1-Achse ein?

Das kann man rechnen, wenn man trigonometrische Formeln kennt.

Besser. Geometrische Überlegung:

Wohin kommt (z.B.) die x_1-Achse?

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der x_1-Achse, anschließend Drehung um O durch den Winkel φ.
Insgesamt gilt für die x_1-Achse: Drehung um O durch den Winkel φ.
Dies bewirkt eine Spiegelung an einer Geraden, die mit der x_1-Achse den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ einschließt.

Satz: Bei einer Spiegelung der Ebene mit der Abbildungsmatrix (**) schließt ein Richtungsvektor der Spiegelungsachse mit der positiven x_1-Achse einen Winkel $\frac{\varphi}{2}$ ein.

Anmerkung:
Kombination einer Drehung oder einer Spiegelung mit einer Translation, verschiebt den Ursprung. Es kommen noch die **Gleitspiegelungen** als ungleichsinnige Bewegungen hinzu.

5.3 Euklidische Bewegungen in der Dimension $n = 3$

Für orthogonale Matrizen U mit $U^T U = E$ folgt über $\mathbb{C}$ aus $U\vec{x} = \lambda\vec{x}$ mit $\vec{x} \neq \vec{o}$:

$$(\overline{U\vec{x}})^T U\vec{x} = (\overline{\lambda\vec{x}})^T \lambda\vec{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{\vec{x}}^T \overline{U}^T U\vec{x} = \overline{\lambda}\lambda\, \overline{\vec{x}}^T \vec{x} \overset{\overline{U}=U}{\Rightarrow}$$

$$\overline{\vec{x}}^T \vec{x} = \overline{\lambda}\lambda\, \overline{\vec{x}}^T \vec{x} \overset{\vec{x}\neq\vec{o}}{\Rightarrow} \overline{\lambda}\lambda = 1 \;\Rightarrow\; |\lambda| = 1$$

$\Rightarrow\; \lambda = \pm 1$ oder $\lambda = e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$.

mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $p_U(\lambda) = 0 = p_U(\overline{\lambda})$.

Für $n = 3$ hat U mindestens einen reellen EW o.E. $\lambda_3 = \pm 1$ und $\vec{r}$ sei ein EV zu λ_3.

Da ein Basiswechsel die EW nicht ändert, wähle $\vec{r}$ als dritten Basisvektor eines KS. Dann ist die neue x_3-Achse Fixgerade (für $\lambda_3 = 1$ sogar Fixpunktgerade, kurz Achse a genannt). In diesem KS gilt:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 = \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

mit einer Bewegungsmatrix $\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$

nach 5.2.(*) ergibt die Bewegungsmatrix

$$U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ mit } \varphi \in [0, 2\pi].$$

mit den EW $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$.

Wahl von 5.2.(**) liefert EW $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = \pm 1$, was in obigem für $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$ (bis auf RF) enthalten ist.

Für $\lambda_3 = 1 \Rightarrow \det(U) = 1$, d.h. $\vec{x}\,' = U\vec{x}$ ist gleichsinnige Bewegung, speziell für:

1) $\varphi = 0$ die **Identität** $U = E$ im $\mathbb{R}^3$.
   (**Fall:** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$)
2) $0 < \varphi < 2\pi$ eine **Drehung** um die Drehachse a durch O mit Richtung $\vec{r}$ und Drehwinkel φ.
3) Speziell für $\varphi = \pi$ eine 180°−Drehung um a = **Achsenspiegelung** an a.
   (**Fall:** $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$)

Vgl. Figur-5-3-RationaleBewegungsmatrix für EW=1

Für $\lambda_3 = -1 \Rightarrow \det(U) = -1$, d.h. $\vec{x}\,' = U\vec{x}$ ist ungleichsinnige Bewegung, speziell für:

1) $\varphi = 0$ eine **Ebenenspiegelung** an einer Ebene $\perp a$ durch O.
   (**Fall:** $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$)
2) $0 < \varphi < 2\pi$ eine **Drehspiegelung** um die Drehachse a mit Winkel φ und Spiegelung an einer Ebene $\perp a$ durch O.
3) Speziell für $\varphi = \pi$ eine **Punktspiegelung** an O. (**Fall:** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$)

Vgl. Figur-5-3-RationaleBewegungsmatrix für EW=-1

Anmerkung:
Kombination einer dieser Bewegungen mit einer Translation, verschiebt den Ursprung und es kommen noch weitere Bewegungen hinzu, z.B. **Schraubungen** um die Achse a und die **Gleitspiegelungen** bzgl. Spiegelebenen.

5.4 Bestimmung des Drehwinkels zu einer Drehmatrix U

$\vec{x}\,' = U\vec{x}$ mit $U^T U = E$, $\det(U) = 1$

nicht orientiert: EWe und Spur (Summe der Diagonalelemente) von U sind basisunabhängig. Damit erhält man φ aus

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: \tilde{U} \quad \text{über}$$

$\mathrm{spur}(\tilde{U}) = 1 + 2\cos\varphi \Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{\mathrm{spur}(\tilde{U})-1}{2}$
und, da die Spur basisunabhängig ist, allgemein:

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{spur}(U) - 1}{2}. \qquad (*)$$

Damit ist $\varphi \in [0, 2\pi)$ bzw. $\varphi \in [-\pi, \pi)$ aber **nicht eindeutig** bestimmt, ($\cos\varphi$ liefert erst mit $\sin\varphi$ den Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ eindeutig.)

Andererseits ist im $\mathbb{R}^3$ die Richtung $\vec{r}$ eines EV von U zum EW 1 mit $|\vec{r}| = 1$ nur bis auf ein Vorzeichen (Orientierung) bestimmt.

Bei einer Drehung o.E. um die x_3-Achse

$\vec{x}\,' = \tilde{U}\vec{x}$ bilden $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \perp x_3-$Achse,

$$\tilde{U}\vec{s} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \text{und } \vec{r} := \vec{s}\times\tilde{U}\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

nach Satz aus 4.3.4 für $\varphi \neq 0\,,\ \pi$ ein Rechtssystem

$\det(\vec{r},\vec{s},\tilde{U}\vec{s}) = \vec{r}^{\,T}(\vec{s}\times\tilde{U}\vec{s}) = \vec{r}^{\,2} = \sin^2\varphi > 0$

und $\vec{r}$ weist für $\varphi \in \begin{cases} (0,\pi) \text{ nach oben.} \\ (\pi, 2\pi) \text{ nach unten.} \end{cases}$

Deutet man eine Drehung um die positive x_3-Achse mit dem Winkel $\varphi \in (\pi, 2\pi)$ als

Drehung um $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ mit dem Winkel

$\tilde{\varphi} = 2\pi - \varphi \in (0,\pi)$,

vgl. Figur-5-4-Orientierung, gilt allgemein:

Rechtsdrehung um die orientierte Achse a durch den Winkel δ

Wählt man das Vorzeichen des EV $\vec{r}$ von U zum EW $\lambda = 1$ mit $|\vec{r}| = 1$ so, dass bzgl. eines beliebig gewählten Vektors $\vec{o} \neq \vec{s} \perp \vec{r}$ ($\vec{s}\,\vec{r} = 0$) $\quad (\vec{r}, \vec{s}, U\vec{s})$ ein **Rechtssystem** ist ($\Leftrightarrow \det(\vec{r}, \vec{s}, U\vec{s}) > 0$), dann liefert

$$\delta = \arccos \frac{\operatorname{spur}(U) - 1}{2} \qquad (*)$$

den **orientierten Drehwinkel** $\delta \in (0, \pi)$.

Umorientierung der Drehachse ($\vec{r} \to -\vec{r}$) bewirkt Änderung des Drehsinns ($\delta \to -\delta$). Das Rechtssystem bleibt ein Rechtssystem.

Ändert man nur die Richtung der Achse **oder** den Drehsinn, wird aus dem Rechtssystem ein Linkssystem.

5.5 Anmerkung zu Drehspiegelungen

$\vec{x}\,' = U\vec{x}$ mit $U^T U = E$, $\det(U) = -1$

Für $\varphi = \tilde{\varphi} \pm \pi$ gilt:

$$\begin{array}{rcccl} \cos\varphi & = & \cos(\tilde{\varphi} \pm \pi) & = & -\cos\tilde{\varphi} \\ \sin\varphi & = & \sin(\tilde{\varphi} \pm \pi) & = & -\sin\tilde{\varphi} \end{array} \quad \Rightarrow \tilde{U} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \cos\tilde{\varphi} & -\sin\tilde{\varphi} & 0 \\ \sin\tilde{\varphi} & \cos\tilde{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jede Drehspiegelung ist eine Drehung um eine Achse a (Richtung $\vec{r}$ EV von U zum EW $\lambda = -1$) durch O mit dem (nicht orientierten) Drehwinkel $\tilde{\varphi} \in (-\pi, \pi)$ und anschließende Punktspiegelung an O :

$$\cos\varphi = -\cos\tilde{\varphi} = \frac{\mathrm{spur}(U) + 1}{2}. \qquad (*)$$

Für $\mathrm{spur}(U) = 1$ liegt eine Ebenenspiegelung vor an einer Ebene $\perp a$ durch O mit Normalenvektor $\vec{r}$.
Für $\mathrm{spur}(U) = -3$ eine Punktspiegelung an O.
Überlegungen zur Orientierung analog zu Drehmatrizen.