Technische Universität München
Fakultät für Mathematik

Klausur

Geometriekalküle

Modul MA2203

24. Februar 2020, 10:30 – 11:30 Uhr

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert

Musterlösung

Aufgabe 1. Sammlung kurzer Fragen

Begründen Sie Ihre Antworten auf die folgenden Fragen durch kurze Rechnung oder lückenlose Argumentation. Auf die Antworten "ja" oder "nein" allein erhalten Sie keine Punkte.

a) Gegeben sei folgende projektive Transformation des $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ in Standardeinbettung

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Welchen Effekt hat diese auf Punkte des $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$?

b) Gegeben sei folgender Ausdruck für vier verschiedene Punkte A, B, C und D auf der komplexen projektiven Geraden $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$:

$$\frac{[AD]}{[AC]} = 2 \cdot \frac{[BD]}{[BC]}.$$

1. Ist dieser Ausdruck projektiv invariant?
2. Sind die Punkte A, B, C und D kozirkular? Liegen sie in harmonischer Lage zueinander?

c) Stellt die folgende Matrix eine projektive Transformation des $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ dar?

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

d) Gegeben seien drei paarweise verschiedene Geraden l, g und h. Die Geraden g und h seien parallel. Welche Beziehung besteht zwischen den Winkeln, die die Geraden l und g beziehungsweise l und h jeweils einschließen? Begründen Sie mit Hilfe projektiver Argumente.

LÖSUNG:

a) Die Transformation stellt eine Stauchung um den Faktor 1/2 dar. Jeder endliche Punkt mit Koordinate $(x, 1)^T$ auf der projektiven reellen Geraden wird somit zum Punkt $(x/2, 1)^T$.
Der Fernpunkt bleibt unverändert, er ist ein Fixpunkt.

b)
- Ja, der Ausdruck entspricht dem Doppelverhältnis $(A, B; D, C) = 2$. DV ist bekannterweise projektiv invariant oder Nachrechnen.
- Einerseits liegen A, B, C, D auf einem Kreis, da ihr DV reell ist.
Andererseits wissen wir, dass $\{\{A, D\}; \{B, C\}\} = -1$, die Punkte also in einer dieser Anordnungen in harmonischer Lage liegen.

c) Nein, Determinante=0.

d) Die Geraden g und h sind parallel zueinander. Also schneiden sie die Ferngerade im gleichen Fernpunkt P_∞. Also ist die Berechnung des Winkels zwischen l und g bzw h identisch, da dieselben Punkte $meet(l, l_\infty)$, P_∞, I und J im Doppelverhältnis der Formel von Laguerre eingesetzt werden.

Aufgabe 2. Konstruktionsvorschrift am Kreis

Gegeben sei ein Kreis im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ und zwei verschiedene endliche Punkte A und B auf dem Kreis (siehe Skizze unten).

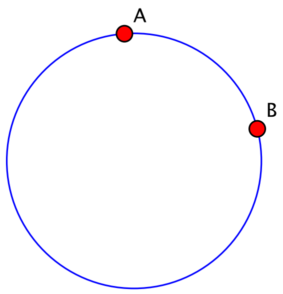
a) Geben Sie eine Konstruktionsvorschrift an, die die Mittelsenkrechte der Strecke AB bestimmt. Dazu stehen Ihnen ausschließlich folgende Mittel zur Verfügung:

- *join*- und *meet*-Operationen,
- eine Funktion $polar(Q) = g$, die für einen Punkt Q die zugehörige Polare bezüglich des Kreises ausgibt,
- eine Funktion $mirror(P, g) = P'$, die einen Punkt P an der Geraden g spiegelt und den Spiegelpunkt P' zurückgibt,
- die speziellen Punkte I und J,
- die Gerade im Unendlichen l_∞,
- eine Funktion $harmonic(A, B, C) = D$, die eine Punkt D bestimmt, der mit A, B, C folgendes Doppelverhältnis erfüllt: $(A, B; C, D) = -1$.

b) Seien nun zwei weitere Punkte C und D verschieden von A und B, aber ebenfalls auf dem Kreis gegeben.

1. Welchen Punkt erhält man als Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten von AB und CD?
2. Wie kann man diesen Punkt in wenigen Schritten aus den Mitteln in a) konstruieren, ohne die Punkte A, B, C und D zu verwenden? Geben Sie eine **kurze** Konstruktionsbeschreibung an.

Bemerkung: Die Matrix zum Kegelschnitt steht Ihnen **nicht** zur Verfügung.



Lösung:

a) Hier gibt es viele verschiedene Lösungsansätze:

Erste Lösung:
- Bestimme Polaren $a = polar(A)$ und $b = polar(B)$
- Bestimme deren Schnittpunkt $S = meet(a, b)$
- Bestimme Spiegelpunkte $S' = mirror(S, join(A, B))$
- Berechne Mittelsenkrechte aus $join(S, S')$.

Zweite Lösung:
- Bestimme Polaren $a = polar(A)$ und $b = polar(B)$
- Bestimme deren Schnittpunkt $S = meet(a, b)$
- Bestimme Mittelpunkt von AB: $M = harmonic(A, B, meet(join(A, B), l_\infty))$
- Berechne Mittelsenkrechte aus $join(S, M)$.

Dritte Lösung:
- Führe die Spiegelungskonstruktion in einer anderen Reihenfolge durch:
- Konstruiere Geraden $ai = join(A, I)$, $aj = join(A, J)$, $bi = jion(B, I)$, $bj = join(B, J)$
- Schneide jeweils zwei: $P = meet(ai, bj)$, $Q = meet(aj, bi)$
- Bestimme Mittelsenkrechte aus $join(P, Q)$

einige weitere Lösungswege

b) - Der Mittelpunkt des Kreises
- $M = meet(polar(I), polar(J))$

Aufgabe 3. Harmonische Lage am Dreieck

Gegeben sei ein (nicht-entartetes) Dreieck mit den Eckpunkten A_1, A_2 und A_3 im $\mathbb{RP}^2$. Nutzen Sie im Folgenden die unten stehende Zeichnung für Ihre Konstruktionen.
Falls Sie Ihre Konstruktion verwerfen möchten, nutzen Sie die zweite Zeichnung und streichen Sie die erste klar und deutlich durch. Im Zweifelsfall wird nur die erste Konstruktion gewertet.

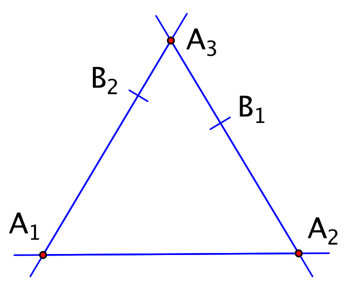
a) Gegeben seien zusätzlich Punkte B_1 auf A_2A_3 und B_2 auf A_1A_3. Wählen Sie einen Punkt B_3 auf der Dreiecksseite A_1A_2 so, dass sich die drei Strecken A_iB_i für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ in einem Punkt schneiden. Markieren Sie in der Zeichnung den gemeinsamen Schnittpunkt deutlich.

b) Konstruieren Sie nun drei weitere Punkte C_1, C_2, C_3 mit folgender Eigenschaft:

Für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ liege C_i auf der Geraden durch die Punkte A_j und A_k, und die Punkte A_j, A_k, B_i, C_i sind in harmonischer Lage, d.h. $(A_j, A_k; B_i, C_i) = -1$.

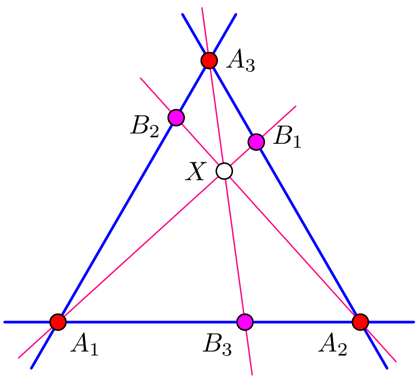
c) Zeigen Sie: Die so konstruierten Punkte C_1, C_2 und C_3 sind kollinear.

d) Was können Sie über die Lage der Punkte B_1, B_2 und B_3 in obiger Konstruktion aussagen unter der Voraussetzung, dass die Punkte C_1, C_2 und C_3 Fernpunkte sind? Welche geometrische Aussage ergibt sich in diesem Fall für die drei Geraden A_iB_i für $i \in \{1, 2, 3\}$?

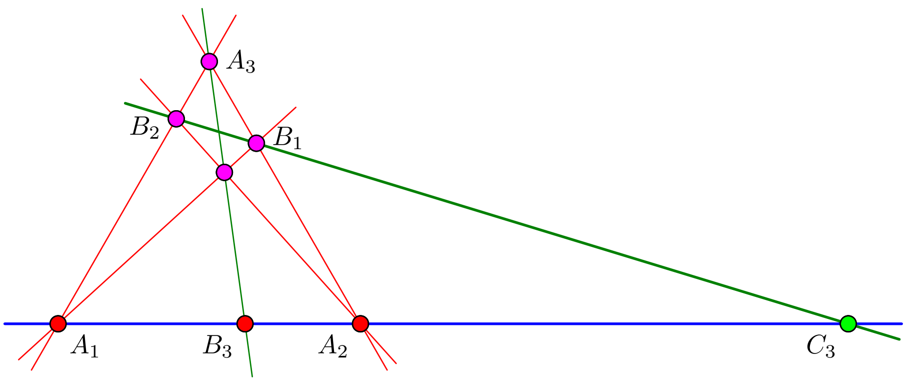


Lösung:

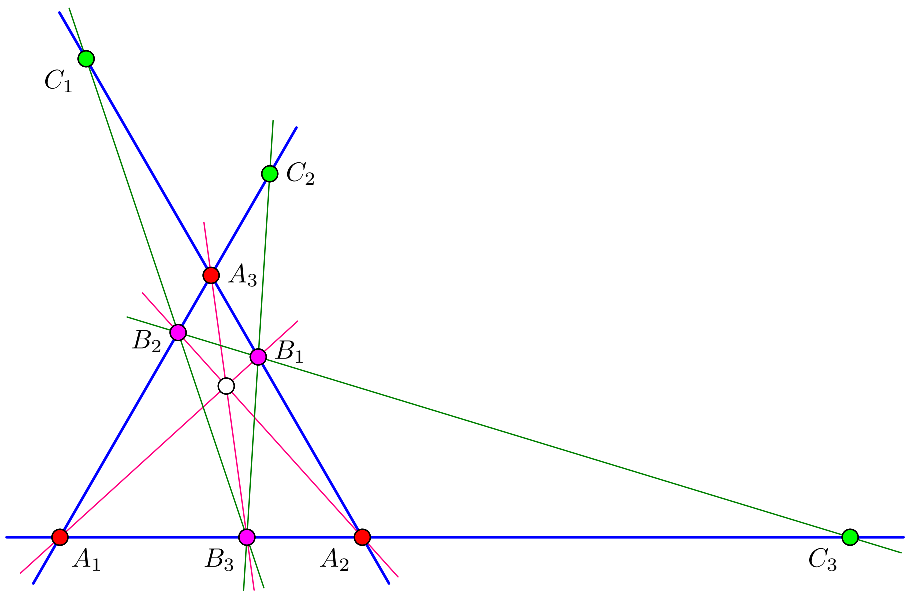
a) Mit B_1 und B_2 ist der gemeinsame Schnittpunkt festgelegt als Schnittpunkt $X = (A_1 \vee B_1) \wedge (A_2 \vee B_2)$, und damit auch $B_3 = (A_3 \vee X) \wedge (A_1 \vee A_2)$.



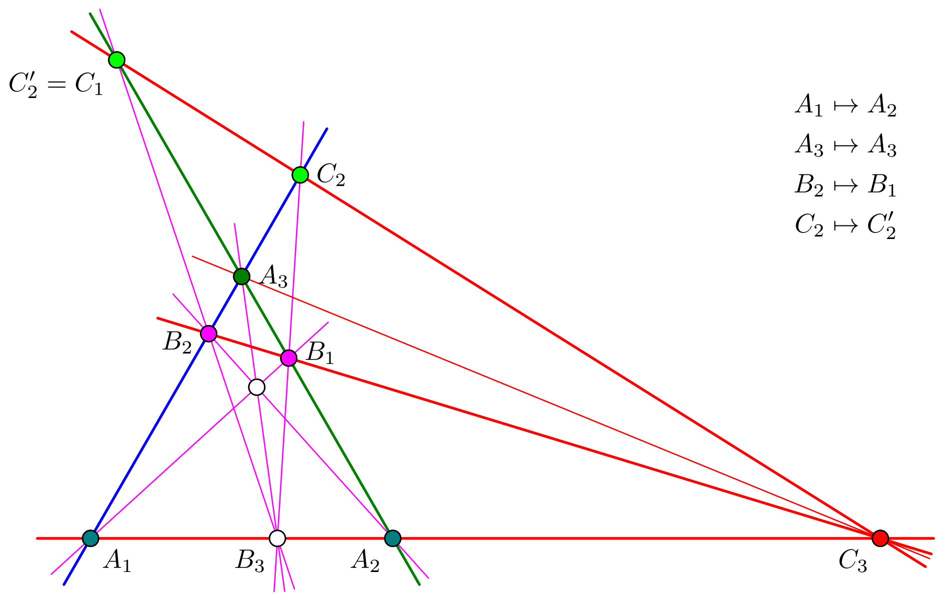
b) Die harmonischen Punkte C_i kann man direkt aus den bisher in der Konstruktion vorhandenen Punkten und Geraden ermitteln. So ergibt sich etwa der Punkt C_3 als Schnitt der Dreiecksgeraden $A_1 \vee A_2$ mit der Verbindungsgeraden $B_1 \vee B_2$.



Die beiden anderen harmonischen Punkte ergeben sich analog.



c) Betrachten wir die projektive Abbildung mit Zentrum C_3, die die (blaue) Gerade durch die Punkte A_1 und A_3 auf die (grüne) Gerade durch die Punkte A_2 und A_3 abbildet. Diese Abbildung bildet A_1 auf A_2, A_3 auf A_3 und B_2 auf B_1 ab.



Das Bild C_2' von C_2 unter dieser Abbildung liegt mit C_2 und C_3 auf einer (roten) Geraden, da es sich um eine Zentralprojektion handelt. Da die Zentralprojektion von einer Geraden auf eine andere projektiv ist und somit Doppelverhältnisse erhält, gilt $(A_2, A_3; B_1, C_2') = (A_1, A_3; B_2, C_2) = -1$. Durch dieses Doppelverhältnis ist der Punkt C_2' auf der (grünen) Geraden $A_2 \vee A_3$ bereits eindeutig festgelegt. Nach Konstruktion ist C_1 genau dieser harmonische Punkt, so dass C_1 und C_2' identisch sein müssen.

Da C_2' aufgrund der Projektion kollinear mit C_2 und C_3 ist, und aufgrund des Doppelverhältnisses identisch mit C_1 ist, muss auch C_1 kollinear mit C_2 und C_3 sein.

d) Wenn C_1, C_2, C_3 Fernpunkte sind, dann liegt B_i in der Mitte von A_j und A_k ($\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$) und es ergibt sich der Satz, dass die Seitenhalbierenden eines Dreiecks sich in einem Punkt schneiden.

Dabei ist natürlich die Rolle von Voraussetzung und Schlussfolgerung gegenüber dem ursprünglichen Satz etwas verändert.

Aufgabe 4. Affine Transformationen

a) Gegeben sei folgende projektive Transformation des $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

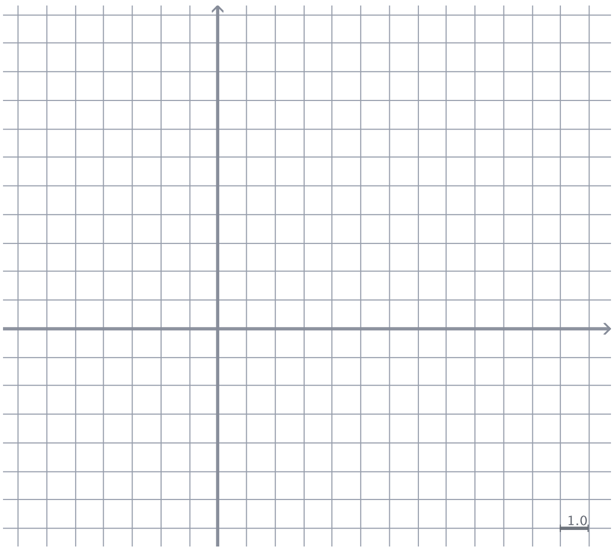
Interpretieren Sie diese geometrisch bezüglich der Standardeinbettung.

b) Es seien g und h zwei Geraden im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ gegeben als Verbindungsgeraden von A und B beziehungsweise C und D, wobei gilt

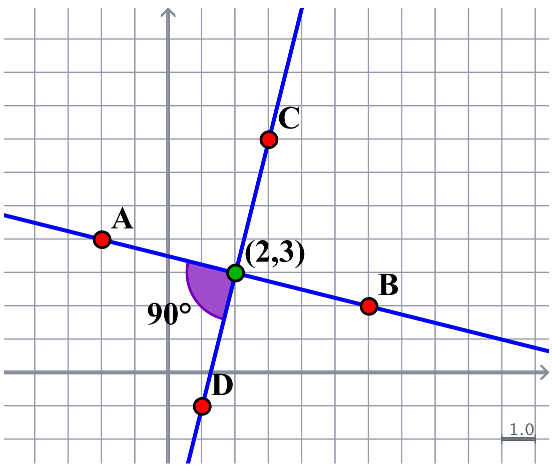
$$A = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine affine Transformation als Produkt von Drehungen, Streckungen, Verschiebungen und/oder Scherungen an, sodass sie die Gerade g auf h und die Gerade h auf g abbildet. Begründen Sie dabei Ihr Vorgehen durch Rechnung. Sie müssen jedoch das Produkt der Matrizen am Ende nicht berechnen, um eine einzige Transformations-Matrix zu erhalten.

Tipp: Nutzen Sie das nebenstehende Koordinatensystem für eine Skizze. Scharfes Hinsehen ist jedoch *keine* ausreichende Begründung Ihrer Schritte.



LÖSUNG:



a) $1/2 = cos(60°)$, $\sqrt{3}/2 = sin(60°) \rightarrow$ die Matrix ist eine Drehmatrix um den Winkel 60°, allerdings im Uhrzeigersinn.

b) $g = join(A, B)$ und $h = join(C, D)$. Ihr Schnittpunkt ist $meet(g, h) = (2, 3, 1)^T$.
Sie stehen senkrecht aufeinander: $G = meet(g, l_\infty) = (8, -2, 0)^T$, $H = meet(h, l_\infty) = (-2, -8, 0)^T$, also $(G, H; I, J) = -1$ und der Winkel zwischen ihnen ist nach der Formel von Laguerre $\alpha = \frac{1}{2i} ln((G, H; I, J)) = \frac{1}{2}\pi \text{ mod } \pi$.

Die gesuchte affine Transformation ist also gegeben als Produkt von drei Matrizen, zwei Translationen und einer Drehung:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5. Fixobjekte und Ferngerade

Begründen Sie alle Ihre Antworten durch Rechnung und/oder lückenlose Argumentation.

a) Gegeben sei die folgende projektive Transformation des $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Geben Sie alle Fixpunkte von M an.
2. Ist die Ferngerade der Standardeinbettung eine Fixpunktgerade von M?
3. Ist die Ferngerade der Standardeinbettung eine Fixgerade von M?

b) Gegeben seien folgende fünf Punkte A, B, C, D und E im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ist der Kegelschnitt durch A, B, C, D und E degeneriert? Begründen Sie, **ohne** die Matrix zum Kegelschnitt zu berechnen.
Wenn nein, ist er eine Ellipse, eine Hyperbel oder eine Parabel?

LÖSUNG:

a)
- Berechnung über charakteristisches Polynom $\chi_M = -(x+1)(x-2)(x-1)$. Also sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$ und die Eigenvektoren dazu sind $v_1 = (1,2,1)^T$, $v_2 = (0,0,1)^T$, $v_3 = (1,1,0)^T$
  Die Fixpunkte sind also die entsprechenden Äquivalenzklassen der Eigenvektoren.
- Nein, denn nicht alle Punkte auf der Ferngeraden $(0,0,1)^T$ sind Fixpunkte der Transformation, nur $(1,1,0)^T$. Man sieht das auch daran, dass es keinen 2-dimensionalen Eigenraum von M gibt.
- Nein, denn zum Beispiel Punkt $(1,0,0)^T$ wird auf einen endlichen Punkt abgebildet, also kann l_∞ keine Fixgerade sein.

b) Nicht degeneriert: Es muss gezeigt werden, dass keine 3 der Punkte auf einer Geraden liegen

- B und D sind Fernpunkte, sie könnten also eine Gerade bilden. Dann müssen A, C und E auf der anderen Geraden liegen. Das tun sie nicht, da sie nicht linear abhängig sind.
- Außerdem wäre es möglich, dass B und D jeweils die Fernpunkte einer der Geraden sind, in die der Kegelschnitt zerfällt. Es muss also geprüft werden, ob je zwei der Punkte A, C und E zusammen mit B oder D kollinear sind. Um dies zu prüfen können entweder die entsprechenden Determinanten bestimmt werden, oder die Fernpunkte der Geraden $join(A,C)$, $join(A,E)$ und $join(C,E)$ werden mit B und D verglichen.

Da der Kegelschnitt nicht degeneriert ist, muss es eine Hyperbel sein, da zwei Fernpunkte (B und D) auf dem Kegelschnitt liegen, die Ferngerade den Kegelschnitt also schneidet.