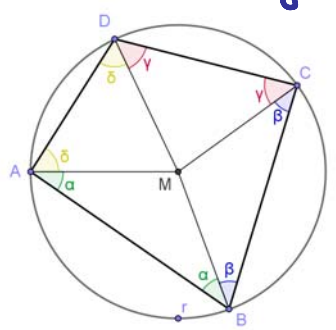
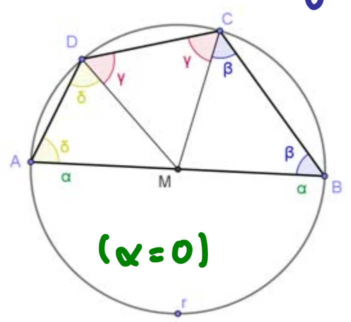
Geometrie LB Blatt 3 Hausaufgaben

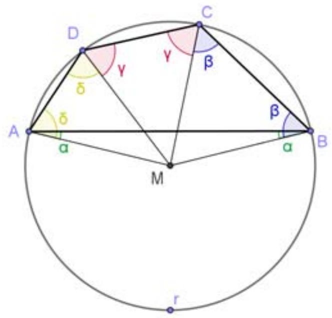
Notiztitel 20.10.2014

<u>H5.</u> <u>1. Weg</u>: Zerlege das Viereck ABCD mit $A, B, C, D \in k$ Kreis um M mittels M in Dreiecke.

Vollständige Fallunterscheidung:







<u>Fall 1</u>: M im Viereck

$\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA$
$= (\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)$
$= (\beta+\gamma)+(\delta+\alpha)$
$= \sphericalangle BCD + \sphericalangle DAB$

<u>Fall 2</u>: M auf Rand

$\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA$
$= \beta+(\gamma+\delta)$
$= (\beta+\gamma)+\delta$
$= \sphericalangle BCD + \sphericalangle DAB$

<u>Fall 3</u>: M außerhalb

$\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA$
$= (\beta-\alpha)+(\gamma+\delta)$
$= (\beta+\gamma)+(\delta-\alpha)$
$= \sphericalangle BCD + \sphericalangle DAB$

Mit Winkelsumme im Viereck $= 360°$ folgt Behauptung

<u>Teil 1</u>: ABCD Sehnenviereck $\Rightarrow$ gegenüberliegende Winkel ergänzen sich zu $180°$.

<u>Teil 2</u>: Umkehrung mittels Widerspruchsbeweis

<u>Annahme</u>: gegenüberliegende Winkel ergänzen sich zu $180°$, o.E $\delta \leq 90°$, aber D liegt nicht auf dem Umkreis u von ABC.

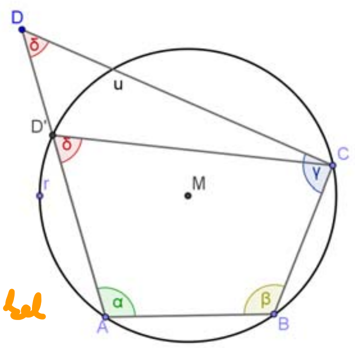
Dann schneidet AD (bzw CD) u in einem Punkt D' mit $\beta + \sphericalangle CD'A = 180°$

$\Rightarrow \sphericalangle CDA = \sphericalangle CD'A = \delta \Rightarrow \sphericalangle DCD' = 0$

da $\sphericalangle CD'A = \sphericalangle CDD' + \sphericalangle DCD'$

Außenwinkel = Summe der nichtanl. Innenwinkel

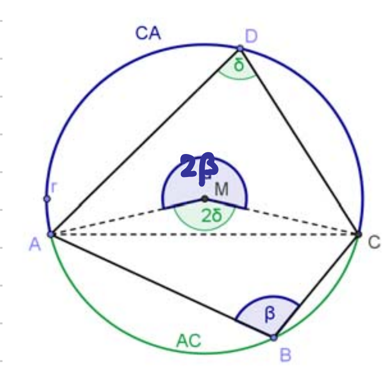
$\Rightarrow$ ↯



Bemerkung: Aus diesem Satz folgt die Aussage zum Peripheriewinkel T7 b) und c), da bei festen A, B, C für alle D auf dem Bogen CA gilt: $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA = 180° \Leftrightarrow \sphericalangle CDA = 180° - \sphericalangle ABC = \text{const}$ ✓

Der Satz zum Mittelpunktswinkel T7 a) ist dann noch zu zeigen

2. Weg: mit Peripheriewinkelsatz:

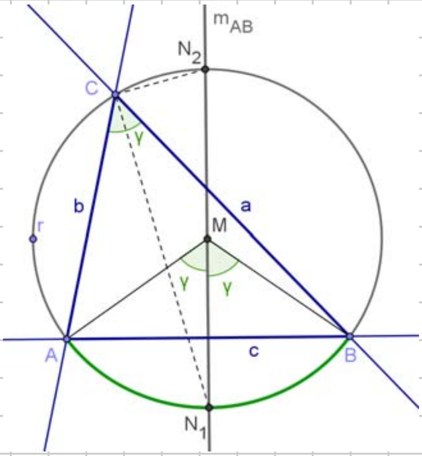


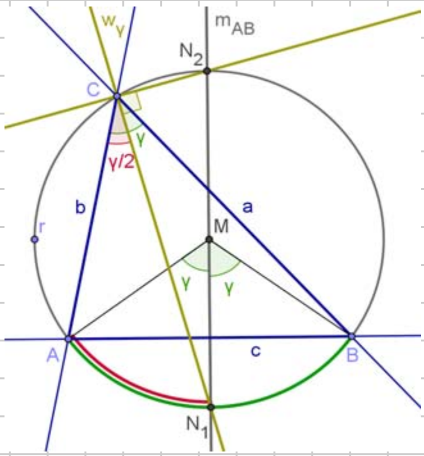
Die Mittelpunktswinkel über den Bögen AC und CA ergänzen sich zu $360°$ und sind jeweils doppelt so groß wie die Peripheriewinkel β und δ $\Rightarrow$ $\beta + \delta = 180°$

Analog ergibt sich $\alpha + \gamma = 180°$

bzw: mit Winkelsumme im Viereck $\alpha + \gamma = 360° - (\beta + \delta) = 180°$

H6.





gegeben: Umkreis k des Dreiecks ABC, sowie $\{N_1, N_2\} = m_{AB} \cap k$.

① $C \in \{N_1, N_2\} \Rightarrow ABC$ ist gleichschenklig und $w_\gamma = m_{AB} = N_1N_2$ (klar)

② Sei also $C \notin \{N_1, N_2\}$

Dann gilt nach dem Peripheriewinkelsatz über dem Bogen AB

$\sphericalangle AMB = 2 \cdot \sphericalangle ACB = 2 \cdot \gamma$

Symmetrie $\Rightarrow \sphericalangle AMN_1 = \sphericalangle N_1MB = \gamma$

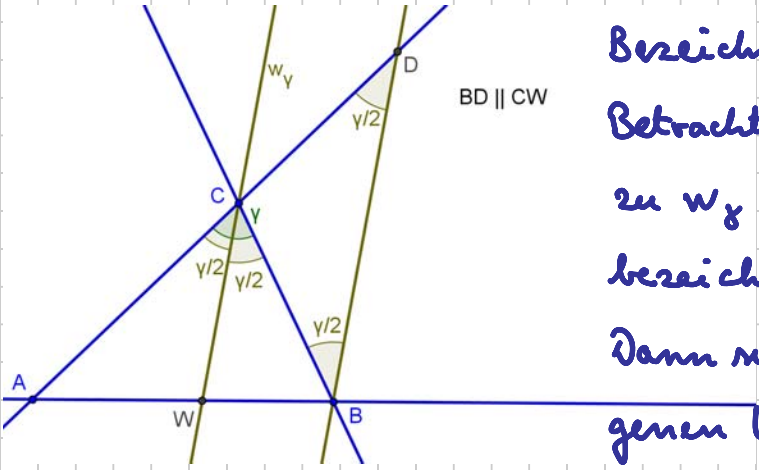
Über dem Bogen AN_1 gilt:

$\sphericalangle AMN_1 = 2 \cdot \sphericalangle ACN_1 = \gamma \Rightarrow \sphericalangle ACN_1 = \frac{\gamma}{2}$

$\Rightarrow CN_1$ ist Innenwinkelhalbierende

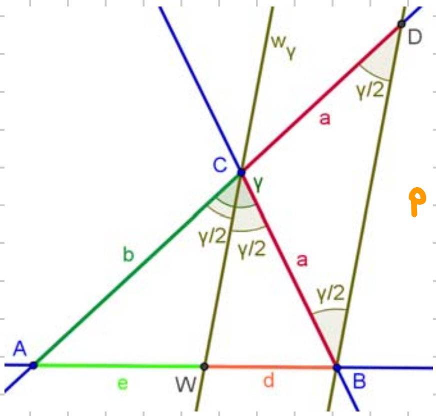
③ C liegt auf dem Thaleskreis über $\overline{N_1N_2} \Rightarrow \sphericalangle N_1CN_2 = 90°$ $\Rightarrow CN_2$ ist Außenwinkelhalbierende

H7.



Bezeichne $W = w_\gamma \cap AB$.
Betrachte die Parallele p zu w_γ durch B und bezeichne $D = p \cap AC$.
Dann sind die eingetragenen Winkel alle gleich $\frac{\gamma}{2}$

Winkel an parallelen Geraden



$\Rightarrow$ Dreieck BCD ist gleichschenklig

$\Rightarrow$ Strecken $\overline{BC} = \overline{CD} = a$

Nach Strahlensatz mit Zentrum A

$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ $\square$