Geometrie LB Hausaufgaben Blatt 10

Notiztitel 01.12.2014

H23 $\vec{x}(s)=\begin{pmatrix}\sin s\\ \frac{1}{2}\sin^2 s\\ \frac{1}{2}(s-\sin s\cos s)\end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}}(s)=$

$\vec{x}'(s)$

a) Parameter mit Bogenlänge von c $\Leftrightarrow |\dot{\vec{x}}(s)|=1\ \forall s \Leftrightarrow (\dot{\vec{x}}(s))^2=1\ \forall s$

(Begründung: gilt $|\dot{\vec{x}}|=1\ \forall s \Rightarrow s=\int|\dot{\vec{x}}|\,ds=s$ (+ Int.konst.))

$(\dot{\vec{x}}(s))^2=$

Wegen $(\vec{x}'(s))^2=1\neq 0$ ist c regulär.

b) Wegen a) gilt: $\vec{x}'(s)\cdot\vec{x}''(s)=0 \Rightarrow \vec{x}''(s)\perp\vec{x}'(s)$ und c ist W-punktfrei $\Leftrightarrow$

$\vec{x}''(s)=\frac{d\vec{x}'}{ds}=$ (klar da $\cos 2s/\sin 2s$ keine gem. Nullstellen haben) $\Leftrightarrow$

$(\vec{x}''(s))^2=$ $\Rightarrow \kappa(s)=|\vec{x}''(s)|$ (Formeln für PD auf Bogenlänge)

c) $s_0=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{t}(\frac{\pi}{2})=\vec{x}'(\frac{\pi}{2})=$, $\vec{n}(\frac{\pi}{2})=\frac{\vec{x}''(\frac{\pi}{2})}{|\vec{x}''(\frac{\pi}{2})|}=$, $\vec{b}(\frac{\pi}{2})=\vec{t}(\frac{\pi}{2})\times\vec{n}(\frac{\pi}{2})=$

$\Rightarrow \sigma(\frac{\pi}{2}): \vec{b}(\frac{\pi}{2})\cdot[\vec{x}-\vec{x}(\frac{\pi}{2})]=$

$\vec{x}'''(s)=$ $\Rightarrow \det(\vec{x}'(\frac{\pi}{2}),\vec{x}''(\frac{\pi}{2}),\vec{x}'''(\frac{\pi}{2}))=$

$\Rightarrow \tau(\frac{\pi}{2})=\frac{\det(\vec{x}',\vec{x}'',\vec{x}''')}{\vec{x}''^2}=0$ ($\tau(s)=$ längere Rechnung nicht verlangt! $=\frac{\cos s\,(2+\sin^2 s)}{1+\sin^2 s}$)

d) Normalprojektion von c in (x,y)-Ebene (d.h. Grundriss c^*) erhält man durch „Weglassen der z-Komponente"

$\Rightarrow c^*: \begin{pmatrix}x(s)\\ y(s)\end{pmatrix}=$ Elimination von s $\Rightarrow$

$\sin s=x$ in 2. Zeile einsetzen

Zusatz: c ist injektiv, d.h. besitzt keine Doppelpunkte.
Der Nachweis ist allerdings etwas aufwändig und wird daher weggelassen!

H24. $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} t\cos t-\sin t \\ t\sin t+\cos t \\ t^2+1 \end{pmatrix},\ t>0,\quad \dot{\vec{x}}(t)=$ $\qquad\qquad\qquad$ $\ddot{\vec{x}}(t)=$

a) $\dot{\vec{x}}(t)\neq\vec{0}$ wegen $t>0$ und 3. Komponente $\Rightarrow$ c regulär

$\vec{x}(t_1)=\vec{x}(t_2)\ \overset{(3.\text{ Komponente})}{\Rightarrow}\ t_1^2=t_2^2\ \overset{(t>0)}{\Rightarrow}\ t_1=t_2$

$\Rightarrow$ c doppelpunktfrei

$\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}}=$ $\qquad\qquad\qquad$ wegen $t>0$ und 3. Komponente

$\Rightarrow$ c W-punktfrei.

b) $|\dot{\vec{x}}(t)|=\sqrt{(\dot{\vec{x}}(t))^2}=$

$\Rightarrow s(t)=$ $\qquad\qquad\qquad$ $\Rightarrow \underline{\vec{y}(s)=\vec{x}(t(s))}$

c) $\kappa(t)=\dfrac{|\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3}$ $\qquad\qquad\qquad$ $\dddot{\vec{x}}(t)=$

$\Rightarrow \det(\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}},\dddot{\vec{x}})=(\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}})\cdot\dddot{\vec{x}}=$

$\tau(t)=\dfrac{\det(\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}},\dddot{\vec{x}})}{(\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}})^2}$

d) $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow \cos\sphericalangle(\dot{\vec{x}},\vec{a})=\dfrac{\dot{\vec{x}}\cdot\vec{a}}{|\dot{\vec{x}}||\vec{a}|}=$ $\qquad\qquad$ c ist Böschungslinie

d.h. c hat gegenüber der xy-Ebene an allen Stellen gleiche Steigung!

<u>Zusatz:</u> Wie folgt kann man zu c die Böschungsrichtung bestimmen:

nicht verlangt!

c ist Böschungslinie $\Leftrightarrow$ Es gibt $\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ mit $\alpha:=\sphericalangle(\vec{a},\dot{\vec{x}})=\text{const}\ \forall t>0$

$\Leftrightarrow \cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\dot{\vec{x}}}{|\vec{a}|\cdot|\dot{\vec{x}}|}=d=\text{const.}\ \forall t>0 \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\dot{\vec{x}}=|\dot{\vec{x}}|\cdot\underbrace{|\vec{a}|\cdot d}_{=:\tilde{d}}$

$\Leftrightarrow -at\sin t+bt\cos t+2tc=t\cdot\sqrt{5}\cdot\tilde{d}\quad\forall t>0$

$\Leftrightarrow -a\sin t+b\cos t+(2c-\sqrt{5}\tilde{d})=0\quad\forall t>0 \Leftrightarrow a=b=0\wedge c=\frac{\sqrt{5}}{2}\tilde{d}$

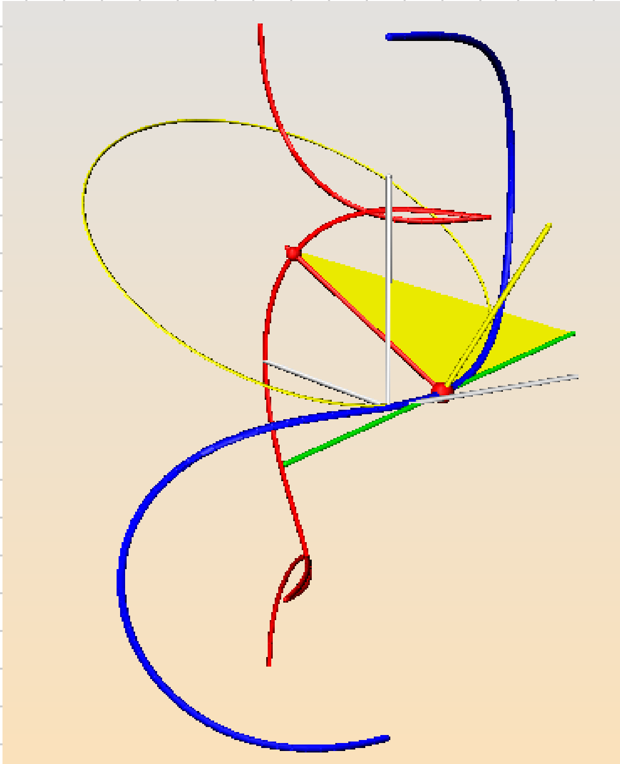
sin t, cos t, 1 sind linear unabhängige Funktionen.

alternativ: Wähle $t=\pi,\ t=2\pi,\ t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow$ LGS für a, b, c.

e) $\vec{x}(t)$ in Φ eingesetzt liefert:

$x^2+y^2-z=$

Figur zu H 23
mit Frenet-Dreibein
Schmiegebene (gelb)
Krümmungskreis (gelb)
und Evolute (rot)



Figur zu H 24: