6 Kurventheorie

6.1 Kurven

6.1.1 **Beispiele** zur Erinnerung

Kreis in der Ebene: $x^2 + y^2 = r^2$,
siehe Figur 6-1-1-Kreis

Das ist eine implizite Gleichung.
implizite Darstellung: $f(x,y) = const.$

Mittelpunkt (0,0), Radius $r > 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Das ist eine **Parameterdarstellung**, kurz: eine **PD**.

Parameter $t \in \mathbb{R}$ oder $t \in [0, 2\pi[$ oder $t \in]-\pi, \pi]$, je nachdem.

Kreis mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$?

PD: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

implizit: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Beachte die Minuszeichen! Vgl. Pythagoras.

6.1.2 Zum Kurvenbegriff

Eine (C^r-)**Kurve** c ($0 \leq r$ mal stetig diff.-bar) im Sinn der Differentialgeometrie ist im $\mathbb{R}^n$ (z.B. $n = 2$ oder $n = 3$) gegeben durch eine C^r-Abbildung $\vec{x} : I \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} : t \mapsto \vec{x}(t)$ eines Intervalls $I \subset \mathbb{R}$ in den R^n.

t ... ein **Parameter** von c
$\vec{x}$ ... eine **Parameterdarstellung** von c
I ... **Parameterintervall**

t ... tempus, temps, time

Schreibweise: $c: \ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \ t \in I$

6.1.3 Bsp.: Gerade

$\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}, \ t \in \mathbb{R}$
Dabei: $\vec{v} \neq \vec{o}$

6.1.4 Bsp.: Strecke

$\vec{x} = \vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a}), \ t \in [0, 1]$
Dabei: $\vec{b} \neq \vec{a}$

6.1.5 Bsp.: Ein Halbkreis

a) $x = t, \ y = f(x) = \sqrt{r^2 - t^2}, \ -r \leq t \leq r$

Explizite Darstellung als Graph einer Funktion f.

b) $x = r \cos u, \ y = r \sin u, \quad 0 \leq u \leq \pi$

6.1.6 Geschlossene Kurven

Eine Kurve
$c : \vec{x}(t), t \in [a, b]$, mit $\vec{x}(a) = \vec{x}(b)$
heißt eine **geschlossene Kurve**.

6.1.7 Reguläre Kurven, Tangente

Erkunde Figur 6-1-7-reguläreRaumkurve.

Sei $c : \; \vec{x}(t),\; t \in I$, eine C^1-Kurve. Ein $t_0 \in I$ mit $\dot{\vec{x}}(t_0) \neq \vec{o}$ heißt eine **reguläre Stelle** von c, sonst **singulär**.

$\dot{\vec{x}}(t_0) \neq \vec{o}$ ist **ein Tangentenvektor** und die Gerade $g : \vec{y} = \vec{x}(t_0) + v\,\dot{\vec{x}}(t_0),\; v \in \mathbb{R}$
die Tangente von c an der Stelle t_0.

Sind alle $t \in I$ reguläre Stellen von c, so heißt c **regulär**, die PD heißt **zulässig**.

6.1.8 Einfache Kurven

Ist $c : \; \vec{x}(t),\; t \in I$, regulär, $u \in I$ fest, und $\vec{x}(v) \neq \vec{x}(u)$ für alle $v \neq u$, so heißt $\vec{x}(u)$ ein **einfacher (Kurven-)Punkt** von c.
Sind alle Punkte von c einfach, so heißt c eine **einfache Kurve**.

Der Begriff "einfach" ist in der Literatur nicht einheitlich!

Ist $\vec{x}(v) = \vec{x}(u)$ mit $v \neq u$, so heißt $\vec{x}(u)$ ein **Doppelpunkt** von c.

6.1.9 Lokale Einfachheit regulärer Kurven (nur für Interessierte)

Sei $c: \ \vec{x}(t), t \in I$, eine C^1-Kurve und $t_0 \in I$ eine reguläre Selle von c. Dann gibt es ein offenes Intervall $J \subset I$ mit $t_0 \in J$, so dass gilt: $c: \ \vec{x}(t), t \in J$, ist einfach.

Bew.: t_0 regulär $\Rightarrow \ \dot{\vec{x}}(t_0) \neq \vec{o} \Rightarrow$ Für ein k gilt: $\dot{x}_k(t_0) \neq 0 \ =$ (Stetigkeit von $\dot{x}_k$) $\Rightarrow$
Es gibt ein Intervall $J \subset I$ mit
$t_0 \in J: \ \dot{x}_k(t) \neq 0 \ \forall \ t \in J$.
Damit ist c regulär auf J.

Wegen der Stetigkeit von $\dot{x}_k$ gilt:
Entweder $\dot{x}_k(t) > 0 \ \forall \ t \in J$
oder $\dot{x}_k(t) < 0 \ \forall \ t \in J \quad \Rightarrow$
x_k ist streng monoton $\left\{ \begin{array}{c} \text{steigend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$ auf J
$\Rightarrow x_k(u) \neq x_k(v) \ \forall \ u, v \in J$ mit $u \neq v$
$\Rightarrow \vec{x}(u) \neq \vec{x}(v) \ \forall \ u, v \in J$ mit $u \neq v$

6.1.10 Wechsel der Parametrisierung

Erkunde Figur 6-1-10-Halbkreis und Figur 6-1-10-Parameterwechsel bei einer Raumkurve.

Sei $c:\ \vec{x}(t),\ t \in I$, eine C^r-Kurve ($r \geq 0$) und $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall sowie $f : J \to I$ eine bijektive C^r-Funktion. Dann ist $\vec{y}(u) := \vec{x}(f(u)),\ u \in J$, eine PD derselben C^r-Kurve c. Die Abb. f heißt eine C^r-**Parametertransformation** (**PT**).

Ist $r \geq 1$ und $\dot{f}(u) \neq 0\ \forall\ u \in J$, so heißt f C^r-**zulässig**.
Ist f zulässig, so ist entweder
$\dot{f}(u) > 0\ \forall\ u \in J$, und f heißt **gleichsinnig**, oder es ist
$\dot{f}(u) < 0\ \forall\ u \in J$, und f heißt **gegensinnig**.

6.1.11 Satz: Sei $c:\ \vec{x}(t),\ t \in I$, eine reguläre C^r-Kurve, $f : J \to I,\ f(u) = t$ eine C^r-zulässige PT.
Dann ist $\vec{y}(u) := \vec{x}(f(u)),\ u \in J$, eine zulässige C^r-PD der Kurve.

Bew.: Aus Analysis: $\vec{x} \circ f$ ist eine C^r-Funktion.
$\dot{\vec{y}}(u) =$ (Kettenregel) $= \dot{\vec{x}}(f(u)) \cdot \dot{f}(u)$.
$\dot{\vec{x}}(f(u)) \neq \vec{o}$ und $\dot{f}(u) \neq 0 \Rightarrow \ \dot{\vec{y}}(u) \neq \vec{o}$.
(Jeweils $\forall\, u$) Insgesamt: $\vec{y}$ ist zulässig.

Auswirkung der PT $\vec{y}(u) := \vec{x}(f(u))$ an regulärer Stelle $t_0 = f(u_0)$ mit $\dot{f}(u_0) \neq 0$:

$$\dot{\vec{y}}(u) = \text{(Kettenregel)} = \dot{\vec{x}}(f(u)) \cdot \dot{f}(u)$$

$\Rightarrow \dot{\vec{y}}(u_0) = \dot{\vec{x}}(t_0)\dot{f}(u_0)$ mit $\dot{f}(u_0) \neq 0$
$\Rightarrow$ für die **Tangenteneinheitsvektoren**:

$$\frac{\dot{\vec{y}}(u_0)}{|\dot{\vec{y}}(u_0)|} = \frac{\dot{\vec{x}}(t_0)}{|\dot{\vec{x}}(t_0)|} \cdot \operatorname{sgn}(\dot{f}(u_0))$$

und für die **Tangente** von c in $t_0 = f(u_0)$:

$$\begin{aligned} g:\ \vec{z} &= \vec{y}(u_0) + v\,\dot{\vec{y}}(u_0) = \\ &= \vec{x}(f(u_0)) + (v\,\dot{f}(u_0))\,\dot{\vec{x}}(t_0) = \\ &= \vec{x}(t_0) + \tilde{v}\,\dot{\vec{x}}(t_0) \text{ mit } \tilde{v} := v\,\dot{f}(u_0). \end{aligned}$$

Die **Kurventangente** bleibt bei **PT** erhalten, die Richtung ändert sich für $\dot{f}(u_0) < 0$

6.1.12 Vereinbarung: Zwei zulässige C^r-PDen beschreiben **dieselbe Kurve**, wenn eine aus der anderen durch eine C^r-zulässige PT hervorgeht.

In der Differentialgeometrie (**DG**) werden i.d.R. bei verschiedenen PD derselben Kurve die Parameter durch verschiedene Buchstaben zu bezeichnen. Manchmal wird aber $\vec{y}(u) =: \vec{x}(u)$ gesetzt.

6.2 Geometrische Eigenschaften von Kurven

Eine Eigenschaft (eine Größe) einer Kurve heißt **geometrisch**, wenn sie unabhängig ist von der PD und vom KS.

Um zu zeigen, dass eine Eigenschaft geometrisch ist, zeigt man die Invarianz gegenüber PTen (manchmal nur gegenüber gleichsinnigen) und gegenüber KTen/Bewegungen (manchmal nur gegenüber gleichsinnigen).

6.2.1 Tangentenvektor, Tangenteneinheitsvektor, Tangente

Das Verhalten dieser Größen unter **PT** haben wir schon in 6.1.11 untersucht.

Auswirkung einer KT/Bewegung:
Basiswechsel bzw. Bewegung $\vec{y} = A\vec{x} + \vec{b}$ mit einer orthogonalen Matrix A (d.h. $A^T A = E =$ Einheitsmatrix) und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$ die Raumdimension).

Gegeben: C^1-Kurve $c:\ \vec{x}(t),\ t \in I$, und Bewegung $\vec{y} = A\vec{x} + \vec{b}$. PD der Bildkurve:

$$\vec{y}(t) := A\,\vec{x}(t) + \vec{b} \;\;\Rightarrow\;\; \dot{\vec{y}}(t) = A\,\dot{\vec{x}}(t)$$

Tangente an Bildkurve (reguläre Stelle t_0):

$z = \vec{y}(t_0) + v\dot{\vec{y}}(t_0) = A(\vec{x}(t_0) + v\dot{\vec{x}}(t_0)) + \vec{b}$
ist Bild der Tangente an c.
Insbesondere: $|\dot{\vec{y}}(t)| = |\dot{\vec{x}}(t)|$, da A orthog.

$$|\dot{\vec{y}}| = \sqrt{\dot{\vec{y}}^T\dot{\vec{y}}} = \sqrt{\dot{\vec{x}}^T A^T A \dot{\vec{x}}} = \sqrt{\dot{\vec{x}}^T \dot{\vec{x}}} = |\dot{\vec{x}}|$$

Damit gilt:

Der Begriff Tangenteneinheitsvektor ist ein geometrischer Begriff bezüglich gleichsinniger zulässiger PTen.
Der Begriff Tangente ist ein geometrischer Begriff bezüglich zulässiger PTen.

6.2.2 Bogenlänge einer C^1-Kurve

Geometrische Überlegung:

Figur 6-2-2-Bogenlänge: Kurve mit Teilpunkten $\vec{x}(t_0), \vec{x}(t_1), \vec{x}(t_2), \ldots, \vec{x}(t_{n-1}), \vec{x}(t_n)$

$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$

Ein einer Kurve einbeschriebener Polygonzug hat die Länge

$$\sum_{i=1}^{n} |\vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1})| =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|\vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1})|}{t_i - t_{i-1}} \cdot (t_i - t_{i-1}) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\vec{x}(t_i)-\vec{x}(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\right| \cdot \Delta t_i \ , \ mit\ \Delta t_i := t_i - t_{i-1} > 0.$$

Satz/Def.: Eine C^1-Kurve
$c:\ \vec{x}(t),\ t \in [a,b]$, hat die **Bogenlänge**

$$L := \int_a^b \ |\dot{\vec{x}}(t)|\ dt.$$

Beweisskizze: Man kann zeigen:

$$\lim_{n\to\infty,\ \Delta t_i \to 0} \ \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\vec{x}(t_i)-\vec{x}(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\right| \cdot \Delta t_i =$$

$$\overset{(MWS\ k.w.)}{=\cdots=} \int_a^b \ |\dot{\vec{x}}(t)|\ dt,$$

dabei muss der MWS komponentenweise angewendet werden, d.h. für jede der k Komponente des Differenzvektors erhält man die Ableitung von $x_k(t)$ an einer Stelle ξ_k zwischen t_{i-1} und t_i.

Satz: Die Bogenlänge ist ein geometrischer Begriff bezüglich KTen/Bewegungen und gleichsinniger zulässiger PTen.

Bew.: Geg.: C^1-Kurve $c: \ \vec{x}(t), \ t \in [a,b]$,
PT $f : [c,d] \to [a,b]$, t=f(u) mit $\dot{f}(u) > 0$
und KT $\vec{y} = A\vec{x} + \vec{b}$.
$c : \vec{y}(u) = A\vec{x}(f(u)) + \vec{b}$.
$\Rightarrow \dot{\vec{y}}(u) = A \cdot \dot{\vec{x}}(f(u)) \cdot \dot{f}(u)$
Da A orthogonal: $|\dot{\vec{y}}(u)| = |\dot{\vec{x}}(f(u))||\dot{f}(u)|$

$$\int_c^d |\dot{\vec{y}}(u)| \ du = \int_c^d |\dot{\vec{x}}(f(u))|\dot{f}(u)du$$

$$\int_{a=f(c)}^{b=f(d)} |\dot{\vec{x}}(t)| \ dt = \int_a^b |\dot{\vec{x}}(t)| \ dt$$

Verwendet: Substitutionsregel für Integrale ($t = f(u)$, $dt = \dot{f}(u)du$ und Grenzen in t: $a = f(c)$, $b = f(d)$) und $\dot{f}(u) > 0$

6.2.3 Beispiele:

(1) Ellipse mehrfach durchlaufen

$$c : \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Dabei: $a, b > 0$ konstant gewählt.

Figur 6-2-3-Ellipse mit Punkten (Scheiteln) in $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$.

Es gilt:

$$(\frac{x_1(t)}{a})^2 + (\frac{x_2(t)}{b})^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Daher ist c in einer Ellipse enthalten.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix} \neq \vec{o}$$

c ist eine reguläre C^ω-Kurve, lokal einfach aber nicht einfach (da 2π-periodisch).

$$\dot{\vec{x}}(t)^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t$$

Die Bogenlänge führt auf ein elliptisches Integral, nicht elementar auswertbar.

Ellipse einfach und "ganz" für $t \in [0, 2\pi[$.

(2) Hyperbel

$$c : \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cosh t \\ b \sinh t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Dabei: $a, b > 0$ konstant gewählt.

Figur 6-2-3-Hyperbelbogen und Graphen von cosh *und von* sinh *im selben KS*

Es gilt:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Folglich ist

$$(\frac{x_1(t)}{a})^2 - (\frac{x_2(t)}{b})^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Daher ist c in einer Hyperbel enthalten.
c ist "nur" ein Hyperbelast!

6.2.4 Bogenlänge als Funktion des Parameters

Betrachte Figur: **Neilsche Parabel**
6-2-4-PT-Bogenlänge

Sei $c : \vec{x}(t),\ t \in I$, eine **reguläre** C^1-Kurve und $a \in I$ und sei:

$$s(t) := \int_a^t |\dot{\vec{x}}(\tau)|\ d\tau.$$

Dann ist $\dot{s}(t) = |\dot{\vec{x}}(t)| > 0\ \forall\, t \in I$, also die Abb. $s : I \to J;\ t \mapsto s = s(t)$ streng monoton zunehmend und stetig (sogar C^1). Folglich ist sie umkehrbar auf J. Es gibt $f : J \to I,\ s \mapsto f(s) = t$. Damit ist $c : \vec{x}(f(s)),\ s \in J$, auf die Bogenlänge als Parameter bezogen. Die PD mit der Bogenlänge als Parameter ist eindeutig bis auf die Anfangsstelle und die Orientierung.

Weil $\dot{s}(t) \neq 0\ \forall\, t \in I$, ist $f \in C^1(J)$ und

$$\frac{df}{ds} = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\dot{s}(t)} = \frac{1}{|\dot{\vec{x}}(t)|} \neq 0$$

Damit ist fast schon gezeigt:

Satz: Jede reguläre C^r-Kurve ($r \geq 1$) lässt sich auf ihre Bogenlänge als Parameter beziehen. Diese PT ist zulässig. Die PD mit der Bogenlänge ist eine C^r-PD.

Bem.: Obiger Satz ist ein Existenzsatz. Es ist in der Regel nicht möglich, die Parametrisierung mit der Bogenlänge explizit anzugeben, aus zwei Gründen:

(1) Das Integral

$$s(t) := \int_a^t |\dot{\vec{x}}(\tau)| d\tau$$

lässt sich i. allg. nicht explizit auswerten.

(2) Die Abb. $t \mapsto s(t)$ lässt sich i. allg. nicht explizit umkehren.

Für rein theoretische Überlegungen kann man aber stets die PD auf Bogenlänge voraussetzen.

6.2.5 Auf ihre Bogenlänge bezogene Kurven

Die Bogenlänge als Kurvenparameter wird mit s bezeichnet, wenn nichts anderes vereinbart ist.

Die Ableitung nach s wird mit einem Strich ' bezeichnet.

Die Bogenlänge s heißt auch **natürlicher Parameter**.

Es gilt:

$$\vec{x}\,'(s) = \frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{1}{\dot{s}(t)} = \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|}$$

Stets ist

$$|\vec{x}\,'(s)| = 1 \quad \forall\, s, \qquad (1)$$

also

$$\vec{x}\,'^2(s) = \vec{x}\,'(s)\vec{x}\,'(s) = 1 \quad \forall\, s. \qquad (2)$$

Ableiten von (2) $(\vec{x}\,''(s)\vec{x}\,'(s) + \vec{x}\,'(s)\vec{x}\,''(s) = 0 \Rightarrow 2\vec{x}\,'(s)\vec{x}\,''(s) = 0)$ liefert nach Division durch 2:

$$\vec{x}\,'(s)\vec{x}\,''(s) = 0 \Leftrightarrow \vec{x}\,''(s) \perp \vec{x}\,'(s) \ \forall\, s \quad (3)$$

Bem.: Da Formeln unter Verwendung der Bogenlänge besonders einfach werden, entwickeln wir die Theorie der Kurven unter Verwendung der Bogenlänge.

Satz: Parameter t ist die Bogenlänge s von $c:\ \vec{x}(t),\ t \in I \ \Leftrightarrow\ |\dot{\vec{x}}(t)| = (\frac{ds}{dt}) = 1 \ \ \forall\, t \in I$.

6.2.6 Beispiel: Schraub(en)linie

$$c:\ \ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ pt \end{pmatrix},\ \ t \in \mathbb{R},$$

mit konstanten $r > 0$, $p \in \mathbb{R}$ ist PD einer Schraublinie. Diese kann in sich bewegt (verschraubt) werden.

Blick in z-Richtung: Kreis mit Radius $r \Rightarrow$ Drehung um z-Achse mit Winkel t und linearem Vorschub $pt \ \ ||\ z$-Achse.

t ... **Schraubwinkel**
p ... **Schraubparameter**
r ... **Schraubradius**

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ p \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}}^2 = r^2 + p^2 > 0$$

c ist eine reguläre C^ω-Kurve.

Bogenlänge mit Anfangsstelle $t = 0$:

$$s(t) = \int_0^t \ |\dot{\vec{x}}(\tau)| \ d\tau = \int_0^t \ \sqrt{r^2 + p^2} \ d\tau =$$

$$= \sqrt{r^2 + p^2} \cdot t$$

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{r^2 + p^2}}$$

PD von c mit der Bogenlänge s:

$$c : \vec{x}(s) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \frac{s}{\sqrt{r^2+p^2}} \\ r \cdot \sin \frac{s}{\sqrt{r^2+p^2}} \\ \frac{p \cdot s}{\sqrt{r^2+p^2}} \end{pmatrix}$$

Spezialfall: $p = 0$ ... **Kreis** mit Radius r:

$$c : \ \vec{x}(s) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \frac{s}{r} \\ r \cdot \sin \frac{s}{r} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vgl Figur 6-2-6-Schraublinie-Bogenlänge

Schritte 1 - 4 $r = \frac{8}{5}$, $p = \frac{6}{5} \Rightarrow r^2 + p^2 = 4$

6.2.7 Begleitendes Dreibein

Geg.: reguläre C^2-Kurve $c: \ \vec{x}(s), \ s \in I$
s Bogenlänge von c, d.h. $|\vec{x}\,'(s)| = 1 \,\forall\, s \in I$

Ein Punkt $\vec{x}(s_0)$ heißt **W-Punkt** von c :$\Leftrightarrow$ $\vec{x}\,''(s_0) = \vec{o}$.

Um Eigenschaften von c zu ermitteln, ordnen wir jedem $s \in I$ eine Orthonormalbasis (ONB) $\vec{t}(s)$, $\vec{n}(s)$, $\vec{b}(s)$ zu, die von der Kurve abhängt.

Wir setzen dazu voraus:
c sei **W-Punkt-frei**, also $\vec{x}\,''(s) \neq \vec{o} \,\forall\, s \in I$.

Dann heißen:

$\vec{t}(s) := \vec{x}\,'(s) \ldots$ **Tangenteneinheitsvektor**

$\vec{n}(s) := \frac{\vec{x}\,''(s)}{|\vec{x}\,''(s)\ldots|} \ldots$ **Hauptnormalenvektor** (vgl. 6.2.5(3))

$\vec{b}(s) := \vec{t}(s) \times \vec{n}(s) \ \ldots$ **Binormalenvektor**

von c an der Stelle s.

$(\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s))$ ist eine Rechts-ONB und heißt das **begleitende Dreibein** (kurz: **3-Bein**) oder **Frenet-3-Bein** von c an der Stelle s.

$\vec{y} = \vec{x}(s_0) + v \cdot \vec{t}(s_0),\ v \in \mathbb{R}$ . . . **Tangente**

$\vec{y} = \vec{x}(s_0) + v \cdot \vec{t}(s_0) + w \cdot \vec{n}(s_0),\ v, w \in \mathbb{R}$

. . . **Schmiegebene**

jeweils von c an der Stelle s_0.

HESSE-Normalform der Schmiegebene σ von c an der Stelle s_0:

$$\sigma: \quad \pm\, \vec{b}(s_0) \cdot (\vec{y} - \vec{x}(s_0)) = 0$$

Das ist eine Gleichung in $\vec{y} = (x, y, z)^T$.

(Das Zeichen $+$ steht, falls $\vec{b}(s_0) \cdot \vec{x}(s_0) \geq 0$.)

Vgl Figur 6-2-6-Schraublinie-Bogenlänge
Schritte 5 - 9

6.2.8 Berechnung von $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ bei allgemeinem Parameter t

Geg.: reguläre C^2-Kurve $c: \ \vec{x}(u),\ u \in I$
u nicht notwendig die Bogenlänge von c.

Ein Punkt $\vec{x}(u_0)$ heißt **W-Punkt** von c :$\Leftrightarrow$
$\dot{\vec{x}}(u_0)$, $\ddot{\vec{x}}(u_0)$ sind **linear abhängig**.

Dann spannen $\dot{\vec{x}}(u_0)$, $\ddot{\vec{x}}(u_0)$ keine Ebene auf.

Wir setzen voraus: c sei **W-Punkt-frei**,
also $\dot{\vec{x}}(u)$, $\ddot{\vec{x}}(u)$ **linear unabhängig** $\forall\, u \in I$

Dann sind:

$\vec{y} = \vec{x}(u_0) + v \cdot \dot{\vec{x}}(u_0),\ v \in \mathbb{R}$ ... **Tangente**

$\vec{y} = \vec{x}(u_0) + v \cdot \dot{\vec{x}}(u_0) + w \cdot \ddot{\vec{x}}(u_0),\ v, w \in \mathbb{R}$

... **Schmiegebene**

von c an der Stelle u_0 und:

$\vec{t}(u) := \frac{\dot{\vec{x}}(u)}{|\dot{\vec{x}}(u)|}$ **Tangenteneinheitsvektor**

$\vec{b}(u) := \frac{\dot{\vec{x}}(u) \times \ddot{\vec{x}}(u)}{|\dot{\vec{x}}(u) \times \ddot{\vec{x}}(u)|}$ **Binormalenvektor**

normal zur Schmiegebene

$\vec{n}(u) = \vec{b}(u) \times \vec{t}(u)$ **Hauptnormalenvektor**

des **begleitenden Dreibeins** von c in u.

6.2.9 Beispiel: Schraublinie

$$c : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos t \\ r \cdot \sin t \\ p \cdot t \end{pmatrix},\quad t \in \mathbb{R}$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin t \\ r \cdot \cos t \\ p \end{pmatrix},\quad \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r \cdot \cos t \\ -r \cdot \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} rp \cdot \sin t \\ -rp \cdot \cos t \\ r^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} p \cdot \sin t \\ -p \cdot \cos t \\ r \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + p^2}}$$

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin t \\ r \cdot \cos t \\ p \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + p^2}}$$

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} = \ldots = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vgl. 6-2-9-Schraublinie-allgemein oder 6-2-9-allgemeineRaumkurve bis Schritt 11

6.2.10 Ableitungsgleichungen von FRENET

Sei $c: \ \vec{x}(s), \ s \in I$, eine reguläre W-Punkt-freie C^3-Kurve. Da $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$, gibt es $a_{11}(s), a_{12}(s), \ldots, a_{33}(s)$, mit:

$$\vec{t}\,'(s) = a_{11}\vec{t}(s) + a_{12}\vec{n}(s) + a_{13}\vec{b}(s) \quad (1)$$

$$\vec{n}\,'(s) = a_{21}\vec{t}(s) + a_{22}\vec{n}(s) + a_{23}\vec{b}(s) \quad (2)$$

$$\vec{b}\,'(s) = a_{31}\vec{t}(s) + a_{32}\vec{n}(s) + a_{33}\vec{b}(s) \quad (3)$$

Ableiten nach s liefert:
Aus $\vec{t}^{\,2}(s) = 1$ folgt $\vec{t}\,\vec{t}\,' = 0$, also $a_{11} = 0$.
Aus $\vec{n}^{2}(s) = 1$ folgt $\vec{n}\,\vec{n}' = 0$, also $a_{22} = 0$.
Aus $\vec{b}^{\,2}(s) = 1$ folgt $\vec{b}\,\vec{b}\,' = 0$, also $a_{33} = 0$.
Letzeres folgt nach Multiplikation von (1) mit $\vec{t}$, von (2) mit $\vec{n}$ und von (3) mit $\vec{b}$.

Analog schließt man:

Aus $\vec{t}\,\vec{n} = 0$ folgt $\vec{t}\,'\vec{n} + \vec{t}\,\vec{n}\,' = 0$, also mit (1)$\cdot\vec{n}$ und (2)$\cdot\vec{t}$: $\quad a_{12} + a_{21} = 0$.

Aus $\vec{t}\,\vec{b} = 0$ folgt $\vec{t}\,'\vec{b} + \vec{t}\,\vec{b}\,' = 0$, also mit (1)$\cdot\vec{b}$ und (3)$\cdot\vec{t}$: $\quad a_{13} + a_{31} = 0$.

Aus $\vec{n}\,\vec{b} = 0$ folgt $\vec{n}\,'\vec{b} + \vec{n}\,\vec{b}\,' = 0$, also mit (2)$\cdot\vec{b}$ und (3)$\cdot\vec{n}$: $\quad a_{23} + a_{32} = 0$.

Bem.: Die Matrix der a_{ik} ist schiefsymmetrisch, weil $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ eine ONB ist.

Weil $\vec{t} = \vec{x}\,'$, ist $\underline{\vec{t}\,'} = \vec{x}\,'' \underline{= |\vec{x}\,''|\vec{n}}$ (6.2.7)
$\Rightarrow a_{11} = 0$ (klar), $\underline{a_{12} = |\vec{x}\,''|}$ und $a_{13} = 0$.

Mit $\underline{\kappa := a_{12}} = -a_{21}$, $0 = a_{13} = -a_{31}$ und $\tau := a_{23} = -a_{32}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\vec{t}\,' &= \qquad \kappa\,\vec{n} \\
\vec{n}\,' &= -\kappa\,\vec{t} \qquad + \tau\,\vec{b} \\
\vec{b}\,' &= \qquad -\tau\,\vec{n}
\end{aligned}$$

Berechnung von κ: $\underline{\kappa(s) = a_{12} = |\vec{x}\,''(s)|}$

κ ... **Krümmung** von c

τ ... **Torsion** oder **Windung** von c

$\frac{1}{\kappa} =: \rho$ ... **Krümmungsradius** von c

$\frac{1}{\tau}$ ... **Torsionsradius** von c

Berechnung von τ $(= \vec{n}\,' \cdot \vec{b})$ nach (2):

Mit $\kappa(s) = |\vec{x}\,''(s)|$ gilt $\vec{n}(s) = \frac{\vec{x}\,''(s)}{\kappa(s)} \quad \Rightarrow$

$\vec{n}\,'(s) = \frac{-\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}\,\vec{x}\,''(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\,\vec{x}\,'''(s) \quad \Rightarrow$

$$\tau(s) = \vec{b} \cdot \vec{n}\,' = (\vec{t} \times \vec{n}) \cdot \vec{n}\,' = \det(\vec{t}, \vec{n}, \vec{n}\,') =$$
$$= \det(\vec{x}\,'(s), \frac{\vec{x}\,''(s)}{\kappa(s)}, \frac{-\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}\,\vec{x}\,''(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\,\vec{x}\,'''(s))$$

(addiere das κ'/κ-fache der zweiten Spalte zur dritten Spalte und ziehe zweimal den Faktor $1/\kappa$ aus der Determinante.)

$$= \frac{1}{\kappa^2(s)} \det(\vec{x}\,'(s), \vec{x}\,''(s), \vec{x}\,'''(s))$$

Satz: Für das begleitende Dreibein $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ einer regulären W-Punkt-freien auf ihre Bogenlänge s bezogenen C^3-Raumkurve $c: \;\; \vec{x}(s),\;\; s \in I$, gelten die **Ableitungsgleichungen von Frenet**:

$$\begin{aligned} \vec{t}\,' &= \qquad \kappa\vec{n} \\ \vec{n}\,' &= -\kappa\vec{t} \qquad + \tau\vec{b} \qquad \text{mit} \\ \vec{b}\,' &= \qquad -\tau\vec{n} \end{aligned}$$

$\kappa(s) = |\vec{x}\,''| > 0$ und $\tau(s) = \frac{\det(\vec{x}\,', \vec{x}\,'', \vec{x}\,''')}{\vec{x}\,''^2}$.

Vgl Figur 6-2-6-Schraublinie-Bogenlänge

Deutung von $|\vec{t}\,'| = \kappa$ und $|\vec{b}\,'| = |\tau|$

Die Krümmung κ ist ein Maß für die Abweichung der Kurve vom geradlinigen Verlauf. ($\vec{t}\,'$ Änderung der Tangente)

Die Torsion τ ist ein Maß für die Abweichung der Kurve vom ebenen Verlauf. ($\vec{b}\,'$ Änderung der Schmiegebene)

6.2.11 Berechnung von κ, τ bei allgemeinem Parameter t

Sei $c : \vec{y}(t),\ t \in I$ die PD mit allgemeinem Parameter t und $\vec{x}(s) := \vec{y}(t(s))$ die PD von c nach der Bogenlänge von c.
Dann gilt nach der Kettenregel:

$$\vec{x}\,' = \dot{\vec{y}} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\vec{y}}}{|\dot{\vec{y}}|} \text{ mit } \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\dot{\vec{y}}|}$$

$$\vec{x}\,'' = \ddot{\vec{y}} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \dot{\vec{y}} \cdot \frac{d^2t}{ds^2}$$

$$\vec{x}\,''' = \dddot{\vec{y}} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3 \cdot \ddot{\vec{y}} \cdot \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d^2t}{ds^2} + \dot{\vec{y}} \cdot \frac{d^3t}{ds^3}$$

und es folgt:

$$\vec{x}\,' \times \vec{x}\,'' = \dot{\vec{y}}\ \frac{dt}{ds} \times \left(\ddot{\vec{y}}\ \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \dot{\vec{y}}\ \frac{d^2t}{ds^2}\right) =$$

$$= \dot{\vec{y}} \times \ddot{\vec{y}} \cdot (\frac{dt}{ds})^3 = \frac{\dot{\vec{y}} \times \ddot{\vec{y}}}{|\dot{\vec{y}}|^3}$$

Mit $|\vec{x}\,' \times \vec{x}\,''| = |\vec{x}\,''|$ (siehe 6.2.10 **(*)**) folgt:

$$\kappa = |\vec{x}\,''| = |\vec{x}\,' \times \vec{x}\,''| = \frac{|\dot{\vec{y}} \times \ddot{\vec{y}}|}{|\dot{\vec{y}}|^3}$$

und

$$\det(\vec{x}\,', \vec{x}\,'', \vec{x}\,''') = \det(\frac{\dot{\vec{y}}}{|\dot{\vec{y}}|}, \frac{\ddot{\vec{y}}}{|\dot{\vec{y}}|^2} + \ldots, \frac{\dddot{\vec{y}}}{|\dot{\vec{y}}|^3} + \ldots)$$

$$= \frac{\det(\dot{\vec{y}}, \ddot{\vec{y}}, \dddot{\vec{y}})}{|\dot{\vec{y}}|^6}$$

$$\tau = \frac{\det(\vec{x}\,', \vec{x}\,'', \vec{x}\,''')}{|\vec{x}\,''|^2} = \frac{\det(\dot{\vec{y}}, \ddot{\vec{y}}, \dddot{\vec{y}})}{|\dot{\vec{y}}|^6} \cdot \frac{|\dot{\vec{y}}|^6}{|\dot{\vec{y}} \times \ddot{\vec{y}}|^2}$$

$$= \frac{\det(\dot{\vec{y}}, \ddot{\vec{y}}, \dddot{\vec{y}})}{(\dot{\vec{y}} \times \ddot{\vec{y}})^2}$$

Merkregel: Anzahl der Punkte in Zähler und Nenner gleich!

Satz: Ist $c: \ \vec{x}(t), \ t \in I$, eine reguläre W-Punkt-freie C^3-Raumkurve, so ist

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3} > 0, \quad \tau(t) = \frac{\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}})}{(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2}$$

Bem.: κ, τ sind geometrische Größen bzgl. **PT** und gleichsinnigen Bewegungen.

6.2.12 Beispiel: Schraublinie

$$c : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos t \\ r \cdot \sin t \\ p \cdot t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin t \\ r \cdot \cos t \\ p \end{pmatrix}, \quad \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r \cdot \cos t \\ -r \cdot \sin t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\dddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} r \cdot \sin t \\ -r \cdot \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} rp \cdot \sin t \\ -rp \cdot \cos t \\ r^2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}}^2 = r^2 + p^2; \quad (\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2 = r^2 \cdot (p^2 + r^2)$$

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3} = \frac{r\sqrt{p^2 + r^2}}{(\sqrt{r^2 + p^2})^3} = \frac{r}{r^2 + p^2}$$

$$\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}}) = p \cdot \det \begin{pmatrix} -r \cos t & r \sin t \\ -r \sin t & -r \cos t \end{pmatrix} = pr^2$$

$$\tau(t) = \frac{pr^2}{r^2(p^2 + r^2)} = \frac{p}{r^2 + p^2}$$

Vgl. 6-2-9-Schraublinie-allgemein oder -allgemeineRaumkurve **Schritte 12+13**

6.2.13 Krümmungskreis Schmiegebene

Sei $c : \vec{x}(s),\ s \in I$, eine W-Punkt-freie C^2-Kurve. d.h. $\kappa(s) \neq 0$:

Liegen $\vec{x}(s)$, $\vec{x}(s+h)$, $\vec{x}(s+l)$ nicht auf einer Geraden, so bestimmen sie eindeutig einen Kreis $k(s,h,l)$ in der von den drei Punkten aufgespannten Ebene $\varepsilon(s,h,k)$. Es gilt:
$\lim_{h,k\to 0} \varepsilon(s,h,k) = \sigma(s) =$**Schmiegebene**
$\lim_{h,l\to 0} k(s,h,l)$ ist der **Krümmungskreis** von c an der Stelle s Sein Mittelpunkt ist

$$\vec{m}(s) := \vec{x}(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \cdot \vec{n}(s),$$

der **Krümmungsmittelpunkt** von c an der Stelle s.

Die Kurve der Krümmungsmittelpunkte von c mit der PD $\vec{m}(s),\ s \in I$, heißt die **Evolute** von c.

Vgl Figur 6-2-6-Schraublinie-Bogenlänge **Schritt 12** *oder 6-2-9-Schraublinie-allgemein oder -allgemeineRaumkurve* **Schritt 14**. *Die Spur von M ist Evolute von c.*

Sprechweise: c berührt an der Stelle s die Schmiegebene und den Krümmungskreis **dreipunktig** oder **von zweiter Ordnung**.

6.2.14 Hauptsatz der Kurventheorie

I ein Intervall, $\kappa : I \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion mit $\kappa(s) > 0\ \forall\ s \in I$, $\tau : I \to \mathbb{R}$ stetig.

Beh.: Es gibt eine C^3-Kurve $c :\ \vec{x}(s)$, $s \in I$, mit der Bogenlänge s, der Krümmung κ und der Torsion τ. Die Kurve ist eindeutig bestimmt bis auf gleichsinnige Bewegungen. Ohne **Bew.**

6.2.15 Kurven mit konstanter Krümmung und Torsion

Wegen 6.2.12 und 6.2.14 gilt: Jede Kurve mit konstanter Krümmung $\kappa > 0$ und konstanter Torsion $\tau \in \mathbb{R}$ ist eine Schraublinie.

Zur Begründung zeigen wir, dass zu geg. κ und τ der Schraubradius r und der Schrauparameter p einer Schraublinie eindeutig bestimmt ist:

Aus 6.2.12: $\kappa = \dfrac{r}{r^2+p^2}$, $\tau = \dfrac{p}{r^2+p^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\tau}{\kappa} = \frac{p}{r} \quad \text{und} \quad \kappa = \frac{\frac{1}{r}}{1+(\frac{p}{r})^2}$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{1}{\kappa}\cdot\frac{1}{1+(\frac{p}{r})^2} = \frac{1}{\kappa}\cdot\frac{1}{1+(\frac{\tau}{\kappa})^2} = \frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}$$

$$\text{und} \quad p = r\cdot\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\tau}{\kappa^2+\tau^2}$$

$p = 0$ ... Kreis mit Radius $\frac{1}{\kappa}$.

6.3 Ebene Kurven

6.3.1 Raumkurven in einer Ebene

Eine W-Punkt-freie (reguläre) C^3-Kurve $c : \vec{x}(t)$, $(t \in I)$ in $\mathbb{E}^3$ ist in einer Ebene enthalten $\Leftrightarrow \tau = 0\ \forall t \in I$.

Beweis: ($\Rightarrow$) Ist c in einer Ebene enthalten, so sind $\dot{\vec{x}}$, $\ddot{\vec{x}}$ und $\dddot{\vec{x}}$ parallel zu dieser Ebene, also linear abhängig.
Daher ist $\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}}) = 0$
und damit

$$\tau = \frac{\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}})}{(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2} = 0.$$

($\Leftarrow$) c besitzt ein begleitendes Dreibein $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ mit $\vec{b}' = -\tau\vec{n} = \vec{o}$ (o.E. PD auf Bogenlänge s),
also ist $\vec{b} = \vec{b}(s)$ konstant.

Die Schmiegebene $\sigma(s)$ hat die Ebenengleichung

$$\vec{b} \cdot (\vec{y} - \vec{x}(s)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b} \cdot \vec{y} = \vec{b} \cdot \vec{x}(s)$$

Dabei ist $\vec{y} = (x_1, x_2, x_3)^T$ ein Punkt und $\vec{b}$ der Normaleneinheitsvektor von $\sigma(s)$.

Da $\vec{b} = \vec{b}(s)$ konstant ist, sind alle Schmiegebenen von c zueinander parallel.

Zudem gilt mit $\vec{b}'(s) = 0$:

$$\frac{d}{ds}(\vec{b}(s)\cdot\vec{x}(s)) = \vec{b}'(s)\cdot\vec{x}(s) + \vec{b}(s)\cdot\vec{x}'(s) = \vec{b}\cdot\vec{t} = 0.$$

Also ist $\vec{b}\cdot\vec{x}(s) = d$ konstant,
damit $\sigma(s) =: \sigma : \ \vec{b}\cdot\vec{y} = d$ konstant
und c eine Kurve, die in einer Ebene liegt, d.h. in der konstanten Schmiegebene σ.

6.3.2 Ebene Kurven

Betrachtet man eine Kurve in einer Ebene ohne umgebenden Raum, so kann man

- die Ebene orientieren durch Auszeichnung einer Rechts-Basis und
- die Kurve beschreiben durch eine PD mit zwei Koordinatenfunktionen.

Wir werden für ebene Kurven eine **vorzeichenbehaftete Krümmung** definieren.

6.3.3 Parameterdarstellung ebener Kurven

Sei $c : \vec{x}(t) \quad (t \in I)$ eine reguläre C^1-PD einer ebenen Kurve. Dann ist

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Ein Tangentenvektor von c an der Stelle t ist gegeben durch

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix},$$

der Tangenteneinheitsvektor von c an der Stelle t ist gegeben durch

$$\vec{t} := \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}},$$

der Hauptnormalenvektor von c an der Stelle t ist gegeben durch

$$\vec{n}(t) := \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}.$$

Die Vektoren $(\vec{t}, \vec{n})$ bilden eine Rechts-ONB, das **begleitende Zweibein** von c.

6.3.4 Die Frenetschen Ableitungsgleichungen für ebene Kurven

Sei $c : \vec{x}(s)$ (Bogenlänge $s \in I$) eine C^2-PD einer ebenen Kurve. Dann ist

$$\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}.$$

Der Tangenteneinheitsvektor von c an der Stelle s ist gegeben durch

$$\vec{t}(s) = \vec{x}\,'(s) = \begin{pmatrix} x\,'(s) \\ y\,'(s) \end{pmatrix},$$

der Hauptnormalenvektor von c an der Stelle s ist gegeben durch

$$\vec{n}(s) := \begin{pmatrix} -y\,'(s) \\ x\,'(s) \end{pmatrix}.$$

Da $\vec{x}\,'^2 = 1$ auf I, ist $\vec{x}\,'\vec{x}\,'' = 0$ auf I, also

$$\vec{x}\,'' = \vec{t}\,' =: \kappa\vec{n}.$$

Dabei heißt $\kappa(s)$ die **Krümmung** von c an der Stelle s.

In den beiden Koordinaten:

$$x\,'' = -\kappa y\,', \quad y\,'' = \kappa x\,'.$$

$$\vec{n}\,'(s) := \begin{pmatrix} -y\,''(s) \\ x\,''(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa x\,'(s) \\ -\kappa y\,'(s) \end{pmatrix} = -\kappa\vec{t}(s).$$

Die Frenet-Gleichungen für ebene Kurven lauten damit

$$\vec{t}\,' = \kappa \vec{n}, \quad \vec{n}\,' = -\kappa \vec{t}.$$

6.3.5 Vorzeichen der Krümmung einer ebenen Kurve

Sei $c : \vec{x}(s)$ (Bogenlänge $s \in I$) eine C^2-PD einer ebenen Kurve. Dann ist

$$\det(\vec{x}\,', \vec{x}\,'') = \det(\vec{t}, \kappa\, \vec{n}) = \kappa$$

also

$$\kappa(s) = \det(\vec{x}\,'(s), \vec{x}\,''(s)).$$

Die Krümmung $\kappa(s)$ einer regulären ebenen C^2-Kurve ist $\left\{\begin{array}{c} > 0 \\ < 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$ Die Vektoren $(\vec{x}\,', \vec{x}\,'')$ bilden eine $\left\{\begin{array}{c} \text{Rechtsbasis} \\ \text{Linksbasis} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$ Die Kurve c ist an der Stelle s $\left\{\begin{array}{c} \text{linksgekrümmt} \\ \text{rechtsgekrümmt} \end{array}\right\}$.

6.3.6 Die Krümmung einer ebenen Kurve bei allgemeinem Parameter

Sei $c : \vec{x}(t) \quad (t \in I)$ eine reguläre C^2-PD einer ebenen Kurve. Dann ist

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}})}{|\dot{\vec{x}}|^3}.$$

Beweis: vgl. 6.2.11

$c : \vec{x}(s) = \vec{y}(t(s)) \Rightarrow \vec{x}\,' = \dot{\vec{y}} \cdot \frac{dt}{ds}$ mit $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\dot{\vec{y}}|}$

und $\vec{x}\,'' = \ddot{\vec{y}} \cdot (\frac{dt}{ds})^2 + \dot{\vec{y}} \cdot \frac{d^2t}{ds^2}$

$$\det(\vec{x}\,', \vec{x}\,'') = \det(\frac{\dot{\vec{y}}}{|\dot{\vec{y}}|}, \frac{\ddot{\vec{y}}}{|\dot{\vec{y}}|^2} + \dot{\vec{y}} \cdot \frac{d^2t}{ds^2}) = \frac{\det(\dot{\vec{y}}, \ddot{\vec{y}})}{|\dot{\vec{y}}|^3}.$$

6.3.7 Der Hauptsatz der Kurventheorie für ebene Kurven

Seien I ein Intervall und $\kappa : \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ s \mapsto \kappa(s) \end{array} \right\}$ stetig. Dann gibt es bis auf gleichsinnige Bewegungen genau eine Kurve in der Ebene mit der Krümmung $\kappa(s)$ an jeder Stelle $s \in I$.

Beweis: Sei $\alpha(s)$ der Winkel, den $\vec{x}\,'(s)$ mit der positiven x-Achse einschließt. Dann ist

$$\vec{x}\,'(s) = \begin{pmatrix} \cos \alpha(s) \\ \sin \alpha(s) \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{t}'(s) = \vec{x}'' = \begin{pmatrix} -\sin\alpha(s) \\ \cos\alpha(s) \end{pmatrix} \cdot \alpha'(s) = \vec{n}(s) \cdot \alpha'(s).$$

Folglich ist

$$\alpha'(s) = \kappa(s),$$

also

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^{s} \kappa(u) \mathrm{d}u + \alpha_0$$

mit einer Integrationskonstanten α_0. Damit ist

$$\vec{x}(s) = \int_{s_0}^{s} \begin{pmatrix} \cos(\int_{s_0}^{v} \kappa(u)\mathrm{d}u + \alpha_0) \\ \sin(\int_{s_0}^{v} \kappa(u)\mathrm{d}u + \alpha_0) \end{pmatrix} \mathrm{d}v + \vec{x}_0$$

mit einer Integrationskonstanten $\vec{x}_0$.

Aus einer vorgegebenen stetigen Krümmung lässt sich eine ebene Kurve bis auf ihre Lage in der Ebene eindeutig explizit berechnen (bis auf sogenannte Quadraturen = Integrationen).

Bsp.: Figur 6-3-7-Hauptsatz-Klothoide