Geometrie für Lehramt an beruflichen Schulen

MA9925

Vorlesung von
Dr. Hermann Vogel
Fakultät für Mathematik
Technische Universität München

Wintersemester 2021/22

Überarbeitetes Skriptum von
Prof. Dr. Johann Hartl

Diese Folien bilden kein Skriptum zur Vorlesung.
Sie sollen das Mitschreiben entlasten.

1 Von der naiven Elementargeometrie zu den Grundlagen der Geometrie

1.1 Wie entstand die Geometrie?

1.1.1 Wortbedeutung

$\gamma\varepsilon\omega\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho\eta\sigma$ = Erdmaß, Landmessung

1.1.2 Notwendigkeit der Geometrie

Die Geometrie entstand aus praktischen Bedürfnissen, z.B.:

Bis zum Bau des Assuanstaudamms im südlichen Ägypten (Erbaut 1960 - 1971) überschwemmte der Nil jährlich das Niltal.

Folgen:

Vorteil: Der Nilschlamm macht die Felder fruchtbar.

Nachteil: Die Felder müssen jährlich neu abgesteckt werden.

Nötig für die jährliche Landvermessung:

Kenntnisse aus der Elementargeometrie, Erfahrungswissen, z.B.:

Wie steckt man auf dem Feld einen rechten Winkel ab?

Verwende eine geschlossene Schnur mit 30 gleichabständigen Knoten, also 30 gleichlangen Abschnitten auf der Schnur.

Drei Landvermesser nehmen je einen Knoten in die Hand: Abstand 5 Abschnitte, 12 Abschnitte, 13 Abschnitte.

Beim Spannen der Schnur ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck.

(Lehrsatz des Pythagoras:

$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$$

schon in Babylon und Indien bekannt, Keilschrift ca. 1829 bis 1530 v. Chr., Formel für Pythagoreische Zahlentrippel)

Die ägyptischen Landvermesser hießen daher auch Harpedonapten = Seilspanner.

1.1.3 Anfänge der Geometrie als Wissenschaft

Thales von Milet (ca. 624 - ca 546 v. Chr.),

Kaufmann, Philosoph und Mathematiker,

begründete Aussagen, indem er sie auf einfachere Aussagen zurückführte.

Philosophische Grundidee: Alles kommt aus dem Urstoff Wasser.

Einfache Messung der Höhe einer Pyramide:

Warten, bis der Schatten eines senkrecht stehenden Stabes so lang ist, wie der Stab.
Dann Schatten der Spitze der Pyramide markieren.
Länge des Schattens der Pyramide messen.
Sie ist gleich der Höhe der Pyramide.

Figur-1-1-3-Pyramidenhöhe,
Figur-1-1-3-PyramideGrundriss
(Änliche Dreiecke, zentrische Streckung)
Sind Sonnenstrahlen parallel?

1.2 Beispiele aus der naiven Elementargeometrie

1.2.1 Entfernung eines Schiffes

Figur-1-2-1-EntfernungSchiff
Skizze: Turm, Schiff auf Meer, Winkel α zwischen Turm und Sehstrahl

Turmhöhe bekannt, Winkel α messen, liefert die Entfernung des Schiffes

(z.B. durch Zeichnung in einem Maßstab oder Ablesen an einem Zeiger, Tabelle für $tan\, \alpha$)

1.2.2 Satz des Thales

Figur-1-2-2-Thales
Skizze: Halbkreis k mit Kreismittelpunkt M und Kreisradius r über Kreisdurchmesser $\overline{AB}$, Dreiecksecke $C \neq A, B$ auf k,
$\angle CAB = \alpha, \angle CBA = \beta$,
$\angle ACM = \gamma_1, \angle BCM = \gamma_2$

Verschiebt man C auf k, vermutet man: $\angle ACB$ ist stets ein rechter Winkel.

Satz:
Von jedem Punkt eines Kreises aus wird jeder Durchmesser des Kreises unter einem rechten Winkel gesehen (außer von den Endpunkten des Durchmessers).

Alternative Formulierung:

Satz:
Sei M der Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$ mit $A \neq B$. Sei $C \neq A, B$ ein Punkt auf dem Kreis um M durch A (und B). Dann ist der Winkel $\angle ACB$ ein Rechter.

Bew.:
ΔAMC ist gleichschenklig $\Rightarrow \alpha = \gamma_1$
ΔBMC ist gleichschenklig $\Rightarrow \beta = \gamma_2$
Folglich ist $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \alpha + \beta$ die Hälfte der Winkelsumme im ΔABC, also ein Rechter.

Durch den Beweis ist der Satz des Thales zurückgeführt auf die beiden einfacheren Sätze:

1) In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich.

2) Die Winkelsumme im Dreieck beträgt zwei Rechte.

Sind diese beiden Sätze wirklich "einfacher"? Sie verwenden beide implizit das Parallelen-Axiom der euklidischen Geometrie.

1.2.3 Satz vom gleichschenkligen Dreieck

Beh.: Jedes Dreieck ist gleichschenklig.

Bew.: Figur-1-2-3-gleichschenklig

Skizze: "Allgemeines Dreieck" ABC,
M Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$,
m Mittellot von $\overline{AB}$,
w nach Augenmaß Winkelhalbierende des Winkels $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ mit $\gamma_1 = \gamma_2$ bei C,
Schnittpunkt S von m und w,
Lotfußpunkt D auf $\overline{AC}$ aus S,
Lotfußpunkt E auf $\overline{BC}$ aus S

Sonderfall: Sind m und w **parallel**, dann ist w die Höhe aus C auf $\overline{AB}$, also
$\alpha + \gamma_1 = \beta + \gamma_2 = 90^\circ \Rightarrow \alpha = \beta$
und ΔABC gleichschenklig. Fertig.

Fall: m und w **nicht parallel**:

Dann ist $m \cap w =: S$ eindeutig bestimmt.

(1) $d(A,M) = d(B,M)$, $d(M,S) = d(M,S)$,
$\angle AMS = \angle BMS \Rightarrow$
$d(A,S) = d(B,S) \qquad (*)$.

(2) $\gamma_1 = \gamma_2$, $d(C,S) = d(C,S)$,
$\angle CDS = \angle CES \Rightarrow$
ΔCDS kongruent $\Delta CES \Rightarrow$
$d(C,D) = d(C,E) \qquad (**)$
$d(D,S) = d(E,S) \qquad (***)$

(3) (*), (***) und $\angle ADS = \angle BES \Rightarrow$
ΔADS kongruent ΔBES
(Der rechte Winkel Bei D bzw. bei E ist der größte Winkel im Dreieck, also der Gegenwinkel der größeren Seite.)
$\Rightarrow d(D, A) = d(E, B)$ (+)

(4) (**), (+) $\Rightarrow d(C, A) = d(C, B) \Rightarrow$
ΔABC gleichschenklig

Folgerung 1: Weil der Beweis auch mit dem Mittellot von $\overline{AC}$ und der Winkelhalbierenden von $\angle ABC$ geführt werden kann, gilt sogar: Jedes Dreieck ist gleichseitig.

Folgerung 2: Weil der Satz falsch ist, muss im Beweis ein Fehler sein.

Bemerkung: Man muss aufpassen wie ein Haftlmacher, damit man nicht "etwas Falsches beweist".

Einschub: Allgemeines Dreieck

1.3 Axiomatisches Vorgehen Euklids

1.3.1 Die "Elemente" von Euklid

Um 300 v. Chr.: Euklid lebt in Alexandria
und lehrt am Museion,
der größten Bibliothek des Altertums.

Euklid fasst das geometrische (allgemeiner das mathematische) Wissen seiner Zeit zusammen in 13 Büchern, genannt "Elemente".

Dabei werden zunächst Definitionen und Aussagen, die so einleuchtend sind, dass sie keines Beweises bedürfen (Axiome und Postulate) aufgeschrieben.

Danach werden Folgerungen gezogen
auf rein logischem Weg
(ohne Rückgriff auf die Anschauung) und in Sätzen festgehalten, die für weitere Folgerungen herangezogen werden können.

(**Einschub: Euklid-Sätze**)

Die Elemente bleiben 2000 Jahre lang **das** für die Wissenschaften vorbildliche Werk!

Man versuchte, auch andere Wissenschaften "more geometrico" zu begründen, aber ohne großen Erfolg.

1.3.2 Bemerkungen zu Euklids Definitionen und Axiomen

(**Einschub: Euklid-Anfang**)

Def. 1 bis 8 u.a. scheinen Appelle an die Anschauung zu sein.

Vergleich von Strecken und Winkeln bleibt unklar.

Def. 17 enthält eine (beweisbare?) Aussage.
Def. 18 ist zumindest zweideutig, er fehlt die Anordnung.

Postulat 5: Das berühmte **Parallelenaxiom**, verwendet die Anordnung implizit.
Figur-1-3-2-Postulat5

(Man unterscheidet heute nicht mehr zwischen Axiomen und Postulaten.)

1.3.3 Das Axiom von Pasch

Es gibt Lücken in der Darstellung, z.B. hat Euklid die Anordnung nicht axiomatisiert:

Reihenfolge von Punkten auf einer Geraden (war beim vorigen Beweis das Problem),

Zerlegung einer Ebene durch eine Gerade in Halbebenen u.ä.

Vollständig wurde das Axiomensystem der euklidischen Geometrie in den "Vorlesungen über neuere Geometrie" (1882) von Moritz Pasch (1843 - 1930).

Nach ihm benannt wurde von Hilbert das **Axiom von Pasch**:

A, B, C drei Punkte, nicht auf einer Geraden, a eine Gerade in der Ebene ABC mit $A, B, C \notin a$. Geht dann a durch einen Punkt der Strecke $\overline{AB}$, so auch durch einen Punkt der Strecke $\overline{BC}$ oder durch einen Punkt der Strecke $\overline{AC}$.

Figur-1-3-3-Pasch

1.4 Was ist ein Punkt, eine Gerade?

Schulgeometrie: Gespannte Schnur

Antwort nach Plato (427 - 347 v.Chr.)

Höhlengleichnis
Punkte, Geraden usw. existieren in der Welt der Ideen (Abstraktion). Die Welt der Ideen ist die eigentlich wirkliche Welt.
Was wir sehen, ist nur ein schwacher Schatten dieser Ideen.

Punkt - Klecks, Gerade - unregelmäßiger Streifen mit ausgezackten Rändern. Plato fordert zur Entwicklung der Geometrie nur Zirkel und Lineal zu verwenden, keine weiteren Apparate z.B. den Konchoidenzirkel, mit dem man Winkel dreiteilen kann, vgl. Figur-1-4-Konchoide.

Physik: kürzeste Verbindung, Lichtstrahl (an großen Massen gekrümmt).

Kürzeste Verbindung in einem Rechtecksraster zwischen zwei Kreuzungen längs des Rasters ist nicht eindeutig.

Kürzeste Verbindung auf einer Kugel liegt auf einem Großkreis (in einer Ebene, die den Kugelmittelpunkt enthält).

1.5 Das Parallelenaxiom am Scheideweg der Geometrien

1.5.1 Die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms

Postulat 5 (Axiom 11) klingt kompliziert für ein Axiom.

Viele Versuche, das Parallelenaxiom als Satz zu beweisen (meist durch Widerspruchsbeweis), scheiterten.

Heute formuliert man das Parallelenaxiom einfacher:

(EP) Zu einer gegebenen Geraden g gibt es durch einen gegebenen Punkt außerhalb von g genau eine Parallele h (eine Gerade h, die mit g in einer Ebene liegt, so dass $g \cap h = \emptyset$).

Letzte veröffentlichte ernstgemeinte Beweisversuche Ende des 18. Jahrhunderts.

Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855),
Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1792 - 1856),
János Bolyai (1802 - 1860)

ersetzten das Parallelenaxiom durch ein anderes:

(HP) Zu einer gegebenen Geraden gibt es durch einen Punkt außerhalb mindestens zwei verschiedene Parallelen (Geraden $h_1 \neq h_2$, die mit g in einer Ebene liegen, so dass $g \cap h_i = \emptyset$ für $i = 1, 2$).

Man erhält dadurch eine neue Geometrie, die keine Widersprüche enthält und von der **euklidischen** Geometrie verschieden ist, eine nichteuklidische Geometrie, die sogenannte **hyperbolische** Geometrie.

Welche Geometrie im realen Raum gilt, entscheidet die Physik, nicht die Mathematik.

1) In der euklidischen Geometrie gibt es wegen **EP** zu einer Geraden g durch einen Punkt P **genau eine Parallele** und die **Winkelsumme** im Dreieck **ist 180**$^\circ$.

2) In der hyperbolischen Geometrie gibt es wegen **HP** zu einer Geraden g durch einen Punkt P **mindestens zwei Parallele** und die **Winkelsumme** im Dreieck **ist kleiner als 180**$^\circ$, vgl.
Modell von Felix Klein (1849 - 1925, Prof. an der TU München von 1875 bis 1880),
Figur-1-5-Klein
Modelle von Henri Poincaré (1854 - 1912),
Figur-1-5-Poincare.

3) in der spärischen (elliptischen) Geometrie auf der Kugel schneiden einander zwei Geraden (Großkreise) stets in einem Punktepaar, d.h. es gibt **keine parallelen Geraden** und die **Winkelsumme** im Dreieck ist **größer als 180**$^\circ$, vgl.
Figur-1-5-Kugelgeometrie.

Es gibt weitere nichteuklidische Geometrien, deren Theorie weit entwickelt ist und Anwendungen findet.

1.5.2 Axiomatisches Vorgehen

Man wählt möglichst wenige einfache (grundlegende) Sätze aus einer mathematischen Theorie aus,
stellt sie als Axiome an den Anfang
und leitet daraus auf rein logischem Weg die übrigen Aussagen der Theorie her.

Axiomensysteme müssen **widerspruchsfrei** sein.

Der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ mit Skalarprodukt ist widerspruchsfrei und bildet ein Modell der euklidischen Geometrie.

Sie sollen **unabhängig** sein, d.h. kein Axiom soll aus den anderen folgen.

Beispiel: Kommutativität ist unabhängig von den anderen Gruppenaxiomen: Es gibt nichtkommutative Gruppen, z.B. die Gruppe der reellen 2x2-Matrizen mit $\det A \neq 0$ bei Matrixmultiplikation

z.B.: $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ein Axiomensystem heißt **vollständig**, wenn jede Aussage der Theorie daraus beweisbar oder widerlegbar ist.
(Vorsicht: ein schwieriger Begriff!)

1.6 Moderne Grundlegung der Geometrie

1.6.1 axiomatisches Vorgehen nach Hilbert

David Hilbert (1862 - 1943) beschreibt 1899 in "Grundlagen der Geometrie", eine streng axiomatische Einführung der Geometrie. (mehrere Auflagen, z.B. auch Stuttgart 1972)

Hilbert definiert Punkte, Geraden und Ebenen nicht explizit als anschauliche Objekte.

Die Axiome beschreiben die Beziehungen zwischen ihnen vollständig.

Z.B.: Punkte liegen auf Geraden (Mengen von Punkten), Geraden in Ebenen, was Punkte sind wird offen gelassen.

Man kann dabei auch an andere Objekte denken.
Wenn diese die Axiome erfüllen, gelten für sie alle Aussagen der Theorie.

1.6.2 Axiome nach Karzel/Sörensen/Windelberg

"Einführung in die Geometrie" 1973
siehe **Einschub: Karzel-Axiomatik**

Stufenweiser Aufbau der euklidischen Geometrie mit Abschweifungen

Beispiele für Inzidenzräume:

$$P = \emptyset, \mathfrak{G} = \emptyset$$

$$P = \{x, y\}, \mathfrak{G} = \{G\}, G = \{x, y\}$$

Wichtigste Beispiele:
Zeichenebene oder $\mathbb{R}^2$,
Anschauungsraum oder $\mathbb{R}^3$