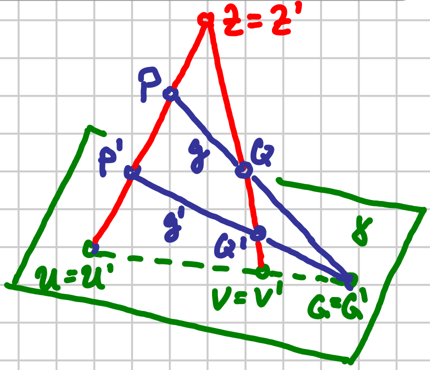
Geometrie LB Übungen Blatt 5

Notiztitel 07.11.2014

aus Vorlesung

Betrachte: Kollineation κ (geradentreue, bijektive Abb.) mit Fixpunktebene γ und Fixpunkt $Z \notin \gamma$ und einen Punkt $P \notin \gamma \cup \{Z\}$.



Bezeichne die Bilder $P' = \kappa(P)$ und $g' = \kappa(g)$.

Es gilt: ZP ist eine Fixgerade

$ZP \cap \gamma = U = U' \Rightarrow (ZP)' = (ZU)' = Z'U' = ZU = ZP$

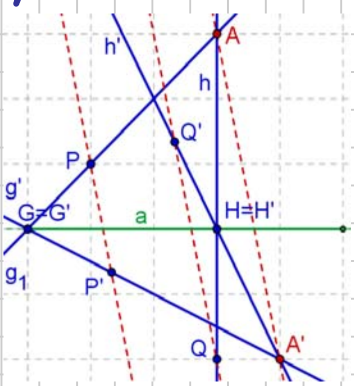
$\Rightarrow P' \in ZP$ mit $P' \notin \gamma \cup \{Z\} \Rightarrow PP'$ ist stets Fixgerade und enthält Z

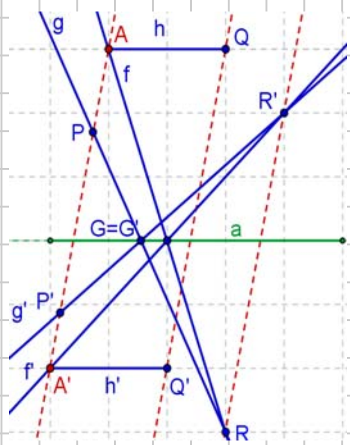
Sind P und P' bekannt, so erhält man zu $Q \notin ZP \cup \gamma$ das Bild Q' auf ZQ mit dem Bild g' von $g = PQ$ als $Q' = ZQ \cap g'$. Dabei gilt: $g \cap \gamma = G = G' \Rightarrow g' = G'P'$

D.h. Aus (P,P') erhält man eindeutig (Q,Q') analog (R,R') und umgekehrt aus (Q,Q') und (R,R') wieder $(P,P') \Rightarrow$ Die Konstruktion ist unabhängig von der Wahl des Punkt-Bildpunktpaars, vgl. auch H8 zum proj. Desargues.

Im Fall $Q \in ZP$, $Q \neq Z$, $Q \notin \gamma$ wähle zur Konstr. von Q' (R,R') mit $Q \notin RR'$

T12. Im P^2 gegeben φ mit Fixpunktgerade a (Affinitätsachse) und Fernpunkt von AA' als Fixpunkt Z (Affinitätsrichtung $\parallel AA'$)

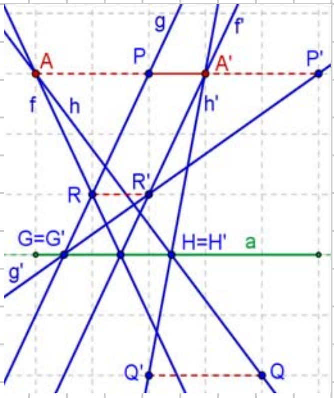




$\Rightarrow$ Eine ebene persp. Affinität φ ist durch a und (A,A') $(A, A' \notin a)$

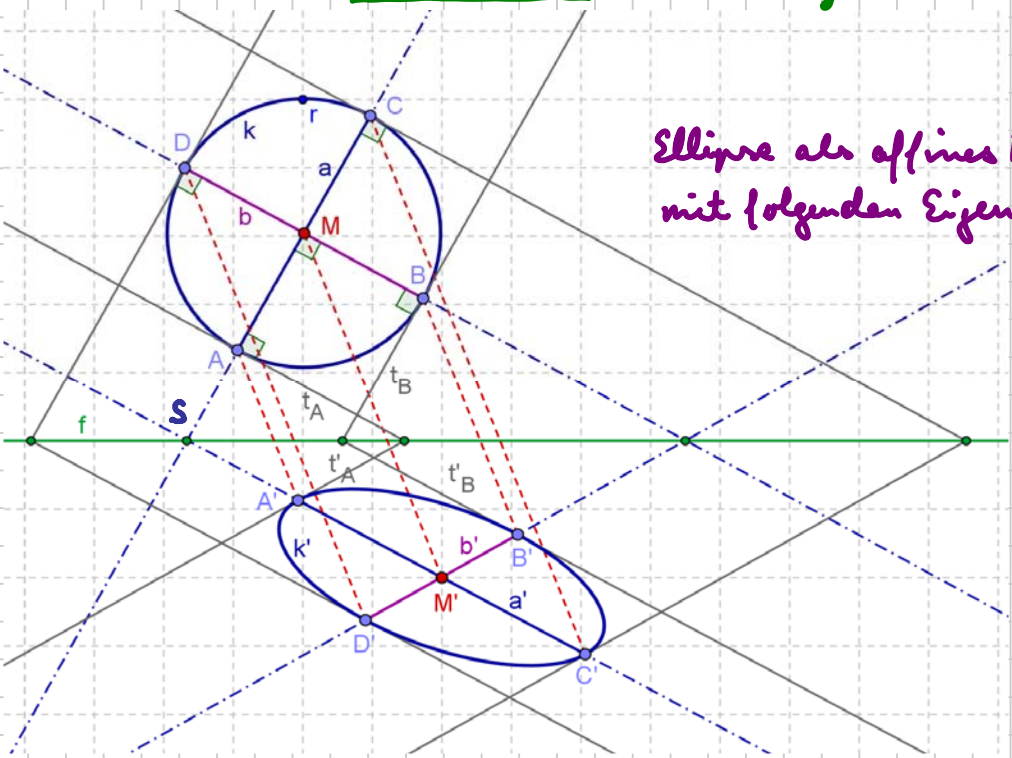
eind. festgelegt und bildet parallele Geraden auf parallele Geraden ab.

vgl. T12_desargues.ggb



Bemerkung: Ist a die Ferngerade und Z eigentlich, so erhält man eine <u>Zentrische Streckung</u> mit Zentrum Z und g'∥g.
Ist a die Ferngerade, Z ∈ a und alle Geraden durch Z Fixgeraden so erhält man eine <u>Translation</u> in Richtung Z ∈ a (Fernpunkt)

<u>T13</u>.



Ellipse als affines Kreisbild mit folgenden Eigenschaften:

<u>Gegeben</u>: Affinität φ Affinitäts-achse f = x-Achse Punkt-Bild punktpaar (M,M') M = (0,3) M' = (2,-2)
und Kreis k(M,r) mit Radius r = 2.

a)1)

2)

3)

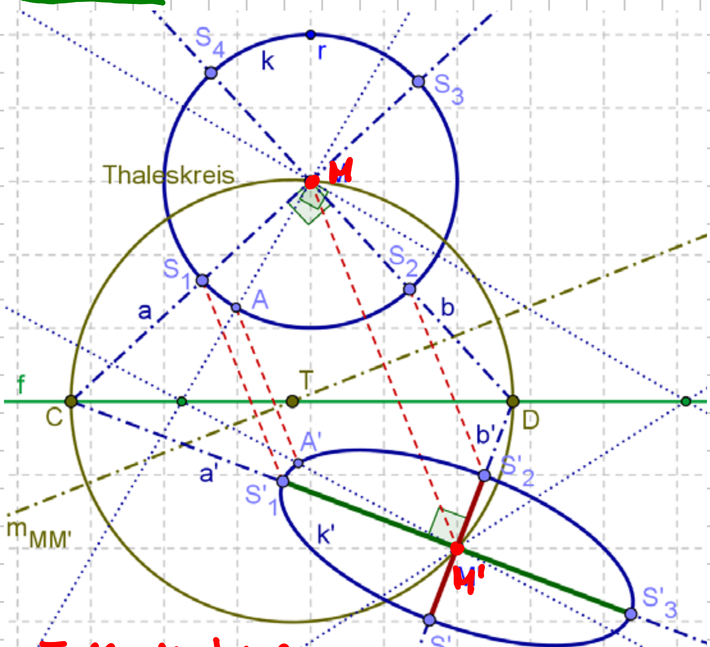
Da t_A die Kreislinie k in genau einem Punkt berührt, trifft t'_A die Ellipse k' auch genau in einem Punkt nämlich A' (vgl. Bijektivität von φ) d.h. t'_A ist Tangente an k' in A'.

4)

Diese Eigenschaft von A'C' und B'D' als Bilder orthogonaler Kreisdurchmesser führt zur Definition konjugierter Ellipsendurchm.

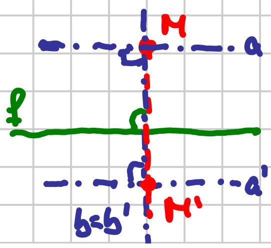
Beachte: A'C' und B'D' sind i.a. nicht zueinander orthogonal

6)



1. Fall: $MM' \not\perp f$

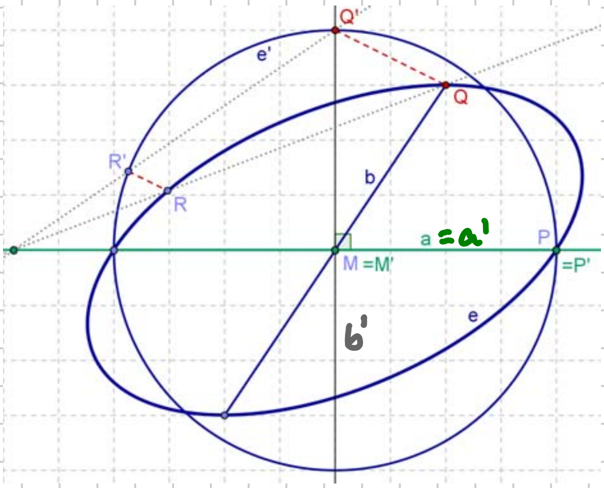
2. Fall: $MM' \perp f$



$a' \perp b'$ sind die Symmetrie-/Hauptachsen von k'.

Beachte: Gilt $MM' \perp f$ und Abstand Mf = Abstand Mf'
$\Rightarrow$ φ ist Achsenspiegelung, d.h. k' ist ein Kreis.
Genau dann ist das Paar (a, b) der Hauptachsen nicht eindeutig, vgl. T13-3.ggb.

c)



Sind konjugierte Halbmesser MP, MQ gegeben, so erhält man die zugehörige Ellipse als Kreisbild mittels einer ebenen persp. Affinität, die wie folgt festgelegt ist:

1)

2)

3)

4)

Anmerkung: Konstruktionen, bei denen der Ellipsenverlauf benötigt wird, führt man nach Wahl z.B. einer perspektiven Affinität am Kreis durch und überträgt die Ergebnisse zurück

z.B.

Affinität φ
Ell. $\to$ Kreis

$$\begin{tikzcd}
e \cap g \arrow[r, dashed, "?"] \arrow[d, "\varphi"] & S_1, S_2 \in e \cap g \\
e', g' \arrow[r, "\text{Konstruktion}", "\text{am Kreis}"'] & S_1', S_2' \in e' \cap g' \arrow[u, "\varphi^{-1}"', "\text{Rücktransformation}"]
\end{tikzcd}$$

(falls vorhanden)