Geometrie LB Hausaufgaben Blatt 10

Notiztitel 01.12.2014

H23 $\vec{x}(s)=\begin{pmatrix}\sin s\\ \frac{1}{2}\sin^2 s\\ \frac{1}{2}(s-\sin s\cos s)\end{pmatrix} \to \dot{\vec{x}}(s)=\begin{pmatrix}\cos s\\ \sin s\cos s\\ \frac{1}{2}(1\underbrace{-\cos^2 s}_{=\sin^2 s}+\sin^2 s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos s\\ \sin s\cos s\\ \sin^2 s\end{pmatrix}$

$\vec{x}'(s)$

a) Parameter mit Bogenlänge von c $\Leftrightarrow |\dot{\vec{x}}(s)|=1\ \forall s \Leftrightarrow (\dot{\vec{x}}(s))^2=1\ \forall s$

(Begründung: gilt $|\dot{\vec{x}}|=1\ \forall s \Rightarrow s=\int|\dot{\vec{x}}|\,ds=s$ (+ Int.konst.))

$(\dot{\vec{x}}(s))^2=\cos^2 s+\sin^2 s\cos^2 s+\sin^4 s=\cos^2 s+\sin^2 s(\underbrace{\cos^2 s+\sin^2 s}_{=1})=\underline{1}$ ✓

Wegen $(\vec{x}'(s))^2=1\neq 0$ ist c regulär.

b) Wegen a) gilt: $\vec{x}'(s)\cdot\vec{x}''(s)=0 \Rightarrow \vec{x}''(s)\perp\vec{x}'(s)$ und c ist W-punktfrei $\Leftrightarrow$

$\vec{x}''(s)=\frac{d\vec{x}'}{ds}=\begin{pmatrix}-\sin s\\ \cos^2 s-\sin^2 s\\ 2\sin s\cos s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin s\\ \cos 2s\\ \sin 2s\end{pmatrix}\overset{!}{\neq}\vec{0}$ (klar da $\cos 2s$ / $\sin 2s$ keine gem. Nullstellen haben) $\Leftrightarrow$

$(\vec{x}''(s))^2=\sin^2 s+1\overset{!}{\neq}0 \Rightarrow \kappa(s)=|\vec{x}''(s)|=\sqrt{1+\sin^2 s}$ (Formeln für PD auf Bogenlänge)

c) $s_0=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{t}(\frac{\pi}{2})=\vec{x}'(\frac{\pi}{2})=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{n}(\frac{\pi}{2})=\frac{\vec{x}''(\frac{\pi}{2})}{|\vec{x}''(\frac{\pi}{2})|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}(\frac{\pi}{2})=\vec{t}(\frac{\pi}{2})\times\vec{n}(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \sigma(\frac{\pi}{2}): \vec{b}(\frac{\pi}{2})[\vec{x}-\vec{x}(\frac{\pi}{2})]=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1/2\\ \pi/4\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y-\frac{1}{2})=0$

$\vec{x}'''(s)=\begin{pmatrix}-\cos s\\ -2\sin 2s\\ 2\cos 2s\end{pmatrix} \Rightarrow \det(\vec{x}'(\frac{\pi}{2}),\vec{x}''(\frac{\pi}{2}),\vec{x}'''(\frac{\pi}{2}))=\det\begin{vmatrix}0&-1&0\\0&-1&0\\1&0&-2\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow \tau(\frac{\pi}{2})=\frac{\det(\vec{x}',\vec{x}'',\vec{x}''')}{\vec{x}''^2}=0$ ($\tau(s)$ = längere Rechnung nicht verlangt! $=\frac{\cos s(2+\sin^2 s)}{1+\sin^2 s}$)

d) Normalprojektion von c in (x,y)-Ebene (d.h. Grundriss c^*) erhält man durch „Weglassen der z-Komponente"

$\Rightarrow c^*: \begin{pmatrix}x(s)\\y(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin s\\ \frac{1}{2}\sin^2 s\end{pmatrix}$. Elimination von s $\Rightarrow y=\frac{1}{2}x^2$ Parabel

$\sin s=x$ in 2. Zeile einsetzen

Zusatz: c ist injektiv, d.h. besitzt keine Doppelpunkte.

Der Nachweis ist allerdings etwas aufwändig und wird daher weggelassen!

H24. $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} t\cos t-\sin t \\ t\sin t+\cos t \\ t^2+1\end{pmatrix},\ t>0,\quad \dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix} -t\sin t \\ t\cos t \\ 2t\end{pmatrix},\quad \ddot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix} -\sin t-t\cos t \\ \cos t-t\sin t \\ 2\end{pmatrix}$

a) $\dot{\vec{x}}(t)\neq\vec{0}$ wegen $t>0$ und 3. Komponente $\Rightarrow$ c regulär

$\vec{x}(t_1)=\vec{x}(t_2) \overset{\text{(3. Komponente)}}{\Rightarrow} t_1^2=t_2^2 \overset{(t>0)}{\Rightarrow} t_1=t_2$

$\Rightarrow$ c doppelpunktfrei

$\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}}=\begin{pmatrix} 2t^2\sin t \\ -2t^2\cos t \\ t^2\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ wegen $t>0$ und 3. Komponente

$\Rightarrow$ c W-punktfrei.

b) $|\dot{\vec{x}}(t)|=\sqrt{(\dot{\vec{x}}(t))^2}=\sqrt{t^2\sin^2 t+t^2\cos^2 t+4t^2}=\underline{t\sqrt{5}}$

$\Rightarrow s(t)=\int_0^t u\sqrt{5}\,du=\frac{\sqrt{5}}{2}t^2 \overset{t>0}{\Rightarrow} t=t(s)=\sqrt{\frac{2s}{\sqrt{5}}} \Rightarrow \underline{\vec{y}(s)=\vec{x}(t(s))}$

c) $\kappa(t)=\frac{|\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3}=\frac{t^2\cdot\sqrt{5}}{t^3\cdot 5\cdot\sqrt{5}}=\underline{\frac{1}{5t}},\quad \dddot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix} -2\cos t+t\sin t \\ -2\sin t-t\cos t \\ 0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det(\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}},\dddot{\vec{x}})=(\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}})\cdot\dddot{\vec{x}}=t^2\cdot\begin{pmatrix} 2\sin t \\ -2\cos t \\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2\cos t+t\sin t \\ -2\sin t-t\cos t \\ 0\end{pmatrix}=\underline{t^2\cdot 2t}$

$\tau(t)=\frac{\det(\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}},\dddot{\vec{x}})}{(\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}})^2}=\frac{2\cdot t^3}{t^4\cdot 5}=\underline{\frac{2}{5t}}$

d) $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \cos\sphericalangle(\dot{\vec{x}},\vec{a})=\frac{\dot{\vec{x}}\cdot\vec{a}}{|\dot{\vec{x}}||\vec{a}|}=\frac{2t}{t\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\text{const} \Rightarrow$ c ist Böschungslinie

d.h. c hat gegenüber der xy-Ebene an allen Stellen gleiche Steigung!

nicht verlangt!

__Zusatz:__ Wie folgt kann man zu c die Böschungsrichtung bestimmen:

c ist Böschungslinie $\Leftrightarrow$ Es gibt $\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ mit $\alpha:=\sphericalangle(\vec{a},\dot{\vec{x}})=\text{const}\ \forall t>0$

$\Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\dot{\vec{x}}}{|\vec{a}|\cdot|\dot{\vec{x}}|}=d=\text{const.}\ \forall t>0 \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\dot{\vec{x}}=|\dot{\vec{x}}|\cdot\underbrace{|\vec{a}|\cdot d}_{=:\tilde{d}}$

$\Leftrightarrow -at\sin t+bt\cos t+2tc=t\cdot\sqrt{5}\cdot\tilde{d}\quad\forall t>0$

$\Leftrightarrow -a\sin t+b\cos t+(2c-\sqrt{5}\tilde{d})=0\quad\forall t>0 \Leftrightarrow a=b=0 \wedge c=\frac{\sqrt{5}}{2}\tilde{d}$

sin t, cos t, 1 sind linear unabhängige Funktionen.

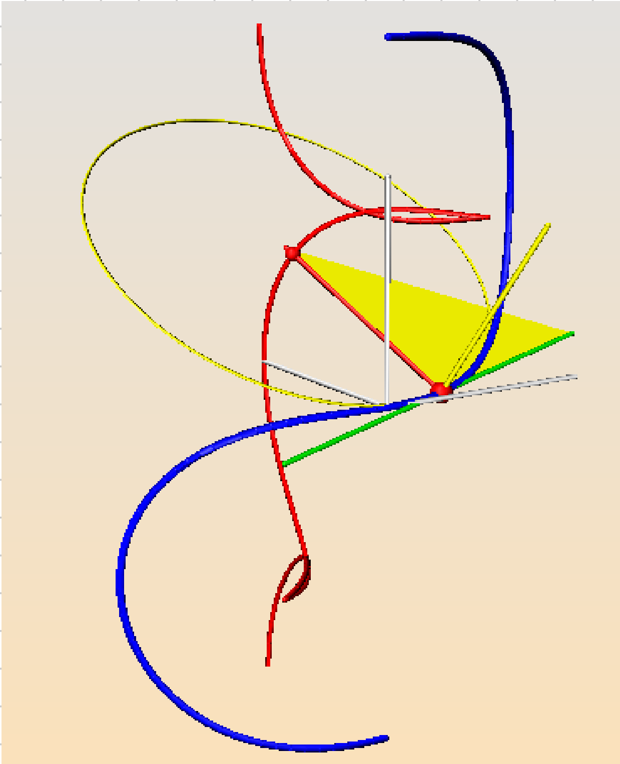
alternativ: Wähle $t=\pi$, $t=2\pi$, $t=\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ LGS für a, b, c.

e) $\vec{x}(t)$ in Φ eingesetzt liefert:

$x^2+y^2-z=(t\cos t-\sin t)^2+(t\sin t+\cos t)^2-(t^2+1)=$

$=t^2+1-(t^2+1)=0$ qed.

Figur zu H 23
mit Frenet-Dreibein
Schmiegebene (gelb)
Krümmungskreis (gelb)
und Evolute (rot)



Figur zu H 24: