Geometrie LB Hausaufgaben Blatt 9

Notiztitel 24.11.2014

H21. $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad t = f(u)$

a) $\frac{d}{dt}\left[(\vec{x}\,'(t))^2\right] = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dots + \dot{x}_n^2\right) = 2\dot{x}_1\ddot{x}_1 + 2\dot{x}_2\ddot{x}_2 + \dots + 2\dot{x}_n\ddot{x}_n$

$= 2\,\dot{\vec{x}}(t)\cdot\ddot{\vec{x}}(t)$ analog zu $\frac{d}{dx}\left((g(x))^2\right) = 2g(x)\cdot g'(x)$

b) $\vec{y}(u) = \vec{x}(f(u))$ Komposition $y := x \circ f$, $J \to \mathbb{R}^n;\ u \mapsto \vec{x}(\underbrace{f(u)}_{t})$

$$\underline{\dot{\vec{y}}(u)} := \frac{d}{du}\vec{y}(u) = \frac{d}{du}(\vec{x}(f(u))) = \begin{pmatrix} \frac{d}{du}x_1(f(u)) \\ \vdots \\ \frac{d}{du}x_n(f(u)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(f(u))\cdot\dot{f}(u) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(f(u))\cdot\dot{f}(u) \end{pmatrix} =$$

komponentenweise Kettenregel! „Nachdiff."

$\frac{dx_i}{du} = \frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{dt}{du} = \frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{df}{du}$

$$= \begin{pmatrix} \dot{x}_1(f(u)) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(f(u)) \end{pmatrix}\cdot\dot{f}(u) = \underline{\dot{\vec{x}}(f(u))\cdot\dot{f}(u)}$$

analog zur bekannten Kettenregel! $\frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x))\cdot f'(x)$

Produktregel

$$\ddot{\vec{y}}(u) = \frac{d}{du}\dot{\vec{y}}(u) = \frac{d}{du}\left[\dot{\vec{x}}(f(u))\cdot\dot{f}(u)\right] = \left(\frac{d}{du}\dot{\vec{x}}(f(u))\right)\cdot\dot{f}(u) + \dot{\vec{x}}(f(u))\cdot\frac{d}{du}\dot{f}(u)$$

$$= \ddot{\vec{x}}(f(u))\cdot(\dot{f}(u))^2 + \dot{\vec{x}}(f(u))\cdot\ddot{f}(u)$$

Kettenregel wie oben!

$$\dddot{\vec{y}}(u) = \frac{d}{du}\ddot{\vec{y}}(u) = \frac{d}{du}\left[\ddot{\vec{x}}(f(u))\cdot(\dot{f}(u))^2 + \dot{\vec{x}}(f(u))\cdot\ddot{f}(u)\right] =$$

Produkt Summe Produkt

Kettenregel

$$= \dddot{\vec{x}}(f(u))\cdot(\dot{f}(u))^3 + \underline{\ddot{\vec{x}}(f(u))\cdot 2\cdot\dot{f}(u)\cdot\ddot{f}(u)} + \underline{\ddot{\vec{x}}(f(u))\,\dot{f}(u)\cdot\ddot{f}(u)} + \dot{\vec{x}}(f(u))\cdot\dddot{f}(u)$$

$$= \dddot{\vec{x}}(f(u))\cdot(\dot{f}(u))^3 + 3\cdot\ddot{\vec{x}}(f(u))\cdot\dot{f}(u)\,\ddot{f}(u) + \dot{\vec{x}}(f(u))\cdot\dddot{f}(u) \qquad (*)$$

Existieren die 3 ersten Ableitungen von x und f so auch von y!

Bem: y ist als Komposition injektiver Abbildungen auch injektiv

$\vec{y}(u_1) = \vec{y}(u_2) \Leftrightarrow \vec{x}(f(u_1)) = \vec{x}(f(u_2)) \overset{\uparrow}{\Leftrightarrow} f(u_1) = f(u_2) \overset{\uparrow}{\Leftrightarrow} u_1 = u_2$

x ist injektiv f ist injektiv

$\Rightarrow y = x \circ f$ ist injektiv.

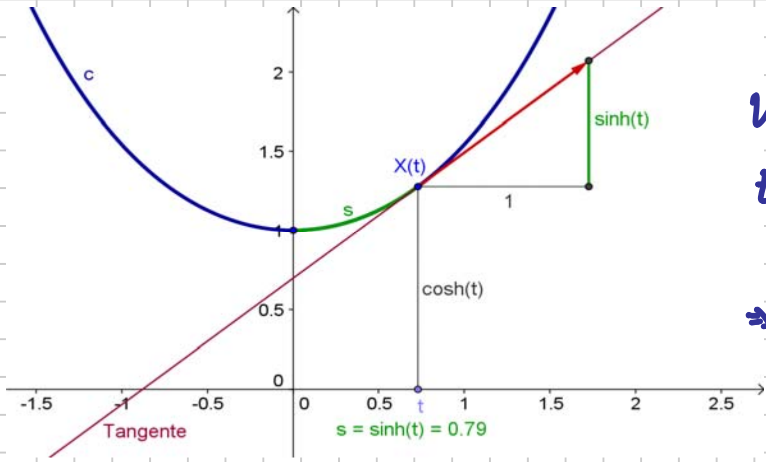
H22. c: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix} \neq 0$ d.h. c ist regulär

$$(\dot{\vec{x}}(t))^2 = 1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t \quad (*)$$

F.S. bzw. $\cosh^2 t - \sinh^2 t = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{1}{4} \cdot 4 e^x e^{-x} = \underline{\underline{1}}$

$$\Rightarrow s = s(t) := \int_0^t \sqrt{(\dot{\vec{x}}(\tau))^2}\, d\tau = \int_0^t \cosh\tau \, d\tau = \sinh\tau \Big|_0^t = \underline{\underline{\sinh t}}$$

vgl. Tangentensteigung!



Umkehrfunktion liefert

$t = t(s) = \operatorname{arsinh} s = \ln(s + \sqrt{s^2+1})$ F.S.

$$\Rightarrow \vec{y}(s) = \vec{x}(t(s)) = \begin{pmatrix} \operatorname{arsinh} s \\ \cosh(\operatorname{arsinh} s) \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \underline{\underline{\begin{pmatrix} \operatorname{arsinh} s \\ \sqrt{1+s^2} \end{pmatrix}}}$$ Bogenlängenparam.

Zusatz: Beispiel einer C^∞-Funktion f, die an einer Stelle x_0 nicht C^ω (analytisch) ist, d.h. dort nicht in eine Potenzreihe (Taylorreihe) entwickelt werden kann, die in einer Umgebung von x_0 gegen die Funktion konvergiert.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \Rightarrow f^{(k)}(0) = 0,\ k \in \mathbb{N}_0$$

$$\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2} \to \infty} = 0$$

$\Rightarrow$ Taylorreihe wäre: $T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = 0$ Nullfunktion $\neq f(x)$ in Umgebung von 0