

# Grundlagen dynamischer Geometrie

*Ulrich H. Kortenkamp, Berlin*

*Jürgen Richter-Gebert, Zürich*

*In this article we present fundamental definitions that can be used to introduce a mathematical model for dynamic geometry. Starting from reasonable expectations that such a model should meet we will formalize the terms (dynamic) construction, instance of a construction and Dynamic-Geometry-System (DGS). The behavior of a DGS will be described by the terms conservatism and continuity. One of the main results of this article is that we can find a continuous DGS for any construction  $Z$  that is built up using algebraic basic construction steps only.*

## 1 Dynamische Geometrie-Systeme

Stellen Sie sich eine Seite aus einem Geometriekapitel eines Mathematikschulbuchs vor. In aller Regel enthält eine solche Seite Bilder, welche einen bestimmten geometrischen Sachverhalt visualisieren sollen. Dabei kann es sich um einfache geometrische Lehrsätze, wie die Tatsache, dass sich die Winkelhalbierenden eines Dreiecks in einem Punkt schneiden, handeln. Während der geometrische Lehrsatz für beliebige Dreiecke gilt, gibt die Zeichnung nur ein einzelnes Beispiel wieder.

*Dynamische Geometrie* ermöglicht es nun mit Computerunterstützung den geometrischen „Erfahrungshorizont“ zu erweitern und durch das Bewegen einer Zeichnung Allgemeingültigkeiten zu erkennen – oder zu verwerfen. In dynamischer Geometrie existiert eine Zeichnung nicht nur als statisches Bild, sondern sie wird intern als Abfolge von Konstruktionsschritten beschrieben. Dadurch kann ein neues Bild aus den Koordinaten der Anfangspunkte berechnet werden. So kann man die Anfangspunkte einer Konstruktion mit der Maus zu greifen und sie in einem *Zugmodus* bewegen, wobei die gesamte Konstruktion sich konsistent mitbewegt. Bild 1 stellt eine statische Visualisierung des Winkelhalbierendensatzes der Idee<sup>1</sup> einer dynamischen Visualisierung gegenüber. Die angegebene Konstruktionssequenz beschreibt, wie man ausgehend von den Punkten  $A$ ,  $B$  und  $C$  das Bild des Winkelhalbierendensatzes konstruiert. Liegt eine solche Konstruktionssequenz vor, so kann man die frei wählbaren Punkte nachträglich mit der Maus verschieben, wobei der Computer für jede neue Position ein neues Bild berechnet und anzeigt. Es entsteht der Eindruck einer fließenden Bewegung.

---

<sup>1</sup>Leider können die dynamischen Effekte in einer gedruckten Publikation nicht wirklich wiedergegeben werden. Zur Ergänzung des Artikels stehen daher unter <http://www.cinderella.de/de/research/gdg.html> Cinderella-Konstruktionen als Applets zur Verfügung, die interaktiv verändert werden können.

- 1: A=FreierPunkt;
- 2: B=FreierPunkt;
- 3: C=FreierPunkt;
- 4: a=Gerade (B,C);
- 5: b=Gerade (A,C);
- 6: c=Gerade (A,B);
- 7: d=Winkelhalbierende (b,c);
- 8: e=Winkelhalbierende (a,c);
- 9: f=Winkelhalbierende (a,b);
- 10: D=Schnittpunkt (d,e);

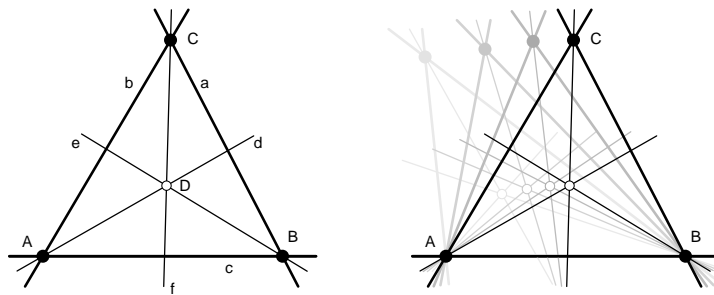


Abbildung 1: Konstruktionssequenz, statisches Bild, Idee des dynamischen Bildes

Der wesentliche Unterschied zwischen dynamischer Geometrie und klassischer, statischer, Elementargeometrie besteht darin, dass der Ereignisraum um eine Dimension erweitert wird, welche die Rolle einer kontinuierlich fortschreitenden Zeit spielt. Während dieser verändert sich die Konstruktion in den ihr gegebenen Grenzen. Hierbei werden bestimmte Punkte der Konstruktion zeitkontinuierlich parametrisiert bewegt, und die abhängigen Elemente sollen in „sinnvoller Weise“ folgen. Eine Problematik, der sich jedes DGS stellen muss, ist, dass im Gegensatz zu dem gerade beschriebenen Ideal einer kontinuierlich verstreichenden Zeit im Computer die Zeit in keiner Weise kontinuierlich verläuft: Bewegt man einen Punkt mit der Maus über den Bildschirm, so erhält der Computer eine diskrete Folge von Mauspositionen. Der Computer, bzw. die Software, muss für jede dieser Positionen entscheiden, welches Bild passend dazu gezeichnet werden soll.

Das Ziel dieses Artikels ist es, eine mögliche mathematische Modellierung dynamischer Geometrie zu beschreiben. Eine solche Modellierung muss zwangsläufig (bewusst oder unbewusst) erfolgen sobald ein dynamisches Geometriesystem tatsächlich implementiert wird. Die Wahl der Modellierung bestimmt entscheidend das spätere Verhalten des DGS. Letztlich zeigt sich die Sinnhaftigkeit einer bestimmten Modellierung a posteriori in den Stärken und Schwächen des auf ihrer Grundlage implementierten Systems.<sup>2</sup> Man kann aber auch a priori bestimmte Qualitätsmerkmale axiomatisch fordern und auf mathematischer Basis zeigen, dass eine bestimmte Modellierung diesen Qualitätsansprüchen genügt – oder zeigen, dass es eine solche Modellierung nicht geben kann. Dies entspricht dem Aufbau dieses Artikels: Ausgehend von sinnvoll erscheinenden Grundforderungen an ein DGS soll die Menge der möglichen Modellierungen sehr stark eingeschränkt werden.

Wir beschränken alle folgenden Betrachtungen auf den zweidimensionalen Fall. Viele der beschriebenen Konzepte lassen sich dennoch wortwörtlich auf höherdimensionale Situationen verallgemeinern.

Naturgemäß umfasst eine Begriffsbildung grundlegender Art das Aufstellen vieler formaler Definitionen. Dies empfinden wir hier nicht als Nachteil, denn eine solche Formalisierung ist im Fall der Dynamischen Geometrie ausgesprochen fruchtbar. Sie führt fast zwangsläufig auf Zusammenhänge

<sup>2</sup>Nicht zu vergessen ist hier, dass ein DGS zum Einsatz in der Lehre dringend einer klaren mathematischen Modellierung bedarf, da diese den zu erfahrenden mathematischen Inhalt, die Semantik des DGS, bestimmt. Ein Curriculum, welches den Einsatz des Computers fordert, muss sich auf die durch den Computer eingebrachten Inhalte verlassen können. Der Wechsel von einer Software zur anderen sollte sich nicht in einem Wechsel von einer Geometrie-Art zur anderen niederschlagen.

mit komplexer Analysis und algebraischen Kurven, die auf den ersten, informellen Blick verborgen bleiben. Wir hoffen, dass sie den Leser zur tieferen Erkenntnis der Komplexität und Schönheit der behandelten Materie führen, und uns somit die hohe Zahl der zu verarbeitenden Konzepte verzeihen wird.

## 2 Mengentheoretische Modellierung

### 2.1 Konstruktionen, Konstruktionen und Instanzen

Typischerweise wird in einem DGS eine Zeichnung durch eine Abfolge von elementaren Operationen erstellt. Jede solche elementare Operation entspricht einer geometrischen Grundoperation („Hinzufügen eines freien Punktes“, „Verbinden zweier Punkte durch eine Gerade“, „Schlagen eines Kreises um einen Mittelpunkt und durch einen Randpunkt“, etc.). Durch die Eingabe einer solchen Operationsfolge entsteht im Computer eine Konstruktionssequenz, eine Art Programm, welche das Verhalten des Bildes während des Zugmodus (weitgehend) festlegt. Wir setzen im Folgenden diese Konstruktionssequenz mit der eigentlichen „Konstruktion“, dem abstrakten, vom Benutzer intendierten geometrischen Sachverhalt, gleich. Was man auf dem Bildschirm sieht, ist immer nur das Bild einer „Instanz“ der Konstruktion: eine konkrete Zeichnung, die allen durch die Konstruktion vorgegebenen Relationen gerecht wird. Unser erstes Teilziel soll es sein, die zu einer Konstruktion passenden möglichen Instanzen zu beschreiben. Ein relationskonsistentes Zugverhalten ist die gemeinsame Grundlage aller DGS. Wir werden aber sehen, dass selbst für eine feste Position der Ausgangspunkte es durchaus noch *mehrere* Instanzen *derselben* Konstruktion geben kann. In einem zweiten Schritt werden wir zeigen wie man aus diesen möglichen Instanzen aufgrund sinnvoll erscheinender Grundforderungen *bestimmte* Instanzen konsistent mit den Forderungen auswählt.

### 2.2 Geometrische Grundobjekte

Grundobjekte, mit denen ein DGS auf alle Fälle umgehen können muss, sind *Punkte*, *Geraden* und *Kreise*. Je nach dem geplanten Einsatzfeld ist es sinnvoll, diese recht kleine Menge von Grundobjekten zu erweitern. So ist es auch denkbar, *Zahlen* zuzulassen, sobald Messungen und das Abtragen von Größen erlaubt sein sollen. Auch *Kegelschnitte* oder *algebraische Kurven* höheren Grades sind Gegenstand der Betrachtung und Implementation mancher DGS.<sup>3</sup>

Es ist hierbei wichtig, zwischen der *internen Repräsentation* eines Objektes, der *Darstellung auf dem Bildschirm* und der eigentlichen *mathematischen Idee* des Objektes klar zu differenzieren. Ziel einer Modellierung sollte es sein, die mathematische Idee durch die computerinterne Repräsentation möglichst exakt darzustellen. In diesem Artikel soll modellhaft die euklidische Ebene mit Punkten, Geraden und Kreisen als Grundobjekten beschrieben werden. Die dargestellte Beschreibung kann analog auf andere Situationen übertragen werden.

Üblicherweise werden bei der Erstellung bzw. Beschreibung einer Konstruktion die Grundobjekte nacheinander durch eine Folge von Operationen angegeben (vgl. die Konstruktionssequenz in

---

<sup>3</sup>Tatsächlich unterstützt nur ein kleiner Bruchteil der erhältlichen DGS Kegelschnitte, was sowohl an der fehlenden Integration in das Curriculum als auch an den besonderen Schwierigkeiten in der Implementation liegt.

Bild 1). Die konstruierten Objekte müssen während des Zugmodus eine „Objektidentität“ behalten: Ein Punkt soll auch weiterhin als Punkt und nicht als Gerade, oder als Kreis dargestellt werden. Dies ist insbesondere wichtig, da die Semantik der Grundoperationen entscheidend von der Typisierung der Eingabegrößen abhängt. Dabei kann es jedoch durchaus vorkommen, dass eine bestimmte Grundoperation nicht ausführbar, wie das Schneiden zweier disjunkter Kreise oder zweier paralleler Geraden, oder nicht eindeutig ist, wie die Verbindungsgerade zweier zusammenfallender Punkte. Der Umgang mit solchen nichtdurchführbaren Operationen bietet einen erheblichen Modellierungsspielraum. In gewisser Weise entscheidet er sogar über die „eigentlich“ modellierte Geometrie. Um nicht von vorneherein eine andere, zum Beispiel die projektive, Geometrie als Grundlage für die Modellierung heranzuziehen, beziehen wir uns zunächst nur auf tatsächlich durchführbare Operationen. Damit halten wir uns für später noch Freiheiten in der Modellierung offen.<sup>4</sup>

Das Ergebnis einer durchführbaren Operation bezeichnen wir als „existentes“ Objekt. Dies führt uns zu unserer ersten, naheliegenden, Grundforderung:

**Grundforderung 1 (Objektidentität):** *In jeder Instanz einer Konstruktion sollen existente Objekte der während der Konstruktion festgelegten Typisierung gehorchen.*

Kurz gesagt: Ein Punkt ist ein Punkt und bleibt ein Punkt.

Da wir die euklidische Ebene mit Punkten, Geraden und Kreisen als zulässigen Objekten darstellen wollen, definieren wir drei Mengen  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{K}$ , die Mengen aller euklidischen Punkte, Geraden bzw. Kreise. Jede dieser Mengen erweitern wir um ein Objekt  $*$ , welches das Ergebnis einer nicht durchführbaren Operation darstellt. Wir setzen  $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \cup \{*\}$ ,  $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G} \cup \{*\}$ , und  $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \cup \{*\}$ . Die Konstruktionsschritte einer Konstruktion legen nun eine bestimmte Typisierung

$$O = O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \in \{\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{K}}\}^n$$

für deren Instanzen fest. Eine Instanz einer Konstruktion besteht dann aus einer Abfolge von konkreten Objekten  $(o_1, \dots, o_n) \in O$ . Diese müssen untereinander noch gewisse relationale Zusammenhänge erfüllen, um tatsächlich Instanz einer *bestimmten* Konstruktion zu sein.

## 2.3 Geometrische Grundoperationen

Eine geometrische Grundoperation erzeugt aus einer (eventuell leeren) Auswahl von bereits konstruierten Objekten ein neues Objekt. Hierbei ist die Typisierung der Ein- und Ausgabeobjekte durch die Art der Grundoperation streng vorgegeben. Typische Vertreter sind „Erzeuge einen freien Punkt“, „Erzeuge den Schnittpunkt zweier Geraden“, „Erzeuge die Verbindungsgerade zweier Punkte“, „Erzeuge eine Winkelhalbierende zweier Geraden“ oder „Erzeuge einen Schnittpunkt von Gerade und Kreis“. Geometrische Grundoperationen setzen die Objekte einer Konstruktion zueinander in Beziehung. Um potentiellen Mehrdeutigkeiten oder der Undurchführbarkeit von Operationen Rechnung zu tragen, stellen wir eine geometrische Grundoperation als Relation  $\omega \in I_1 \times \cdots \times I_k \times O$  mit  $I_1, \dots, I_k, O \in \{\mathbf{P}, \mathbf{G}, \mathbf{K}\}$  dar. Die ersten  $k$  Einträge spielen hierbei die Rolle der Eingangselemente. Die Zahl  $k$  ist die *Stelligkeit* der Operation. Der letzte Eintrag stellt das Ergebnis der Operation

<sup>4</sup>Genaugenommen werden wir durch die nun folgenden Grundforderungen erzwingen, dass die Dynamische Geometrie den historischen Entwicklungen in der Geometrie folgt. Die Modellierungsfreiheiten werden dabei nicht willkürlich, sondern mathematisch begründet genutzt.

dar. Die Menge  $O$  bezeichnen wir als *Typ* der Grundoperation. Die Menge  $\omega(i_1, \dots, i_k) := \{o \in O \mid (i_1, \dots, i_k, o) \in \omega\}$  bezeichnen wir als *Ausgabemenge* von  $\omega$  zur Eingabe  $(i_1, \dots, i_k)$ . So lässt sich die Operation „Verbindungsgerade“ als 2-stellige Relation auf  $\mathbf{P} \times \mathbf{P} \times \mathbf{G}$  vom Typ „Gerade“ auffassen. Die relationale Modellierung erlaubt es uns die Verbindungsgerade zweier identischer Punkte  $p$  und  $q$  sowohl als nicht-existent anzusehen, als auch jede Gerade durch  $p$  zuzulassen. In einem Falle wäre  $\omega(p, p)$  leer, im anderen unendlich groß. Üblicherweise hat eine geometrische Grundoperation  $\omega$  bei allgemeiner Lage der Eingangselemente aber nur eine *endliche* Menge von möglichen Ausgabewerten  $\omega(i_1, \dots, i_k)$ .<sup>5</sup> In Teil 4 untersuchen wir diese Mehrdeutigkeiten genauer und definieren dazu die Bézout-Zahl einer Operation.

**Grundforderung 2 (Relationskonsistenz):** *Jede vom DGS gezeigte Instanz einer Konstruktion soll den durch die Konstruktion gegebenen Relationen genügen.*

Wir fassen nun beide Grundforderungen in einer formalen Definition von Konstruktion und Instanz zusammen. Eine geometrische Grundoperation  $\omega \in I_1 \times \dots \times I_k \times O$  erweitern wir zu einer Operation  $\tilde{\omega}$  auf  $\tilde{I}_1 \times \dots \times \tilde{I}_k \times \tilde{O}$  gemäß:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} = & \omega \cup \{(i_1, \dots, i_k, *) \in I_1 \times \dots \times I_k \times \tilde{O} \mid \text{Es gibt kein } o \text{ mit } (i_1, \dots, i_k, o) \in \omega\} \\ & \cup \{(i_1, \dots, i_k, o) \in \tilde{I}_1 \times \dots \times \tilde{I}_k \times \tilde{O} \mid \text{Es gibt ein } j \text{ mit } i_j = *\}. \end{aligned}$$

Die erste Zeile erweitert jede Operation so, dass wenigstens das „nicht durchführbar“-Symbol  $*$  als Ausgabe verfügbar ist. Die zweite Zeile gibt uns die Freiheit einer zusätzlichen Struktur im  $*$ -Element: Wird  $*$  als Eingabe einer Operation verwendet, so ist jede Ausgabe möglich. Die im nächsten Kapitel formulierte Grundforderung nach Kontinuität schränkt allerdings hierbei die sinnvollen Möglichkeiten der Wahl der Ausgabeelemente wieder stark ein.

Wir fassen alle von dem DGS zugelassenen derart erweiterten Grundoperationen in einer Menge  $\mathcal{G}$  zusammen. Diese Menge ist der „Befehlssatz“ des DGS, die Menge der ausführbaren Grundoperationen.

**Definition 2.1** *Eine (dynamische) Konstruktion  $Z$  besteht aus*

- (i) *einer Sequenz  $(O_1, O_2, \dots, O_n)$  mit  $O_i \in \{\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{K}}\}$  für  $i = 1, \dots, n$ ,*
- (ii) *einer Sequenz  $(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \dots, \tilde{\omega}_n) \in \mathcal{G}^n$ , wobei jede Operation  $\tilde{\omega}_i$  vom Typ  $O_i$  ist,*
- (iii) *und für jede  $k$ -stellige Operation  $\tilde{\omega}_i \subset I_1 \times \dots \times I_k \times O_i$  einer Eingabezuordnung  $v_i = (s_1^i, \dots, s_k^i) \in \mathbb{N}^k$  mit  $s_j^i < i$  für  $j = 1, \dots, k$  und  $O_{s_j^i} = I_j$  für  $j = 1, \dots, k$ .*

Teil (i) definiert die Typisierung der verschiedenen Elemente der Konstruktion. Teil (ii) stellt die Grundoperationen bereit, aus denen die einzelnen Elemente berechnet werden sollen. Teil (iii) stellt die Verknüpfung der einzelnen Konstruktionsschritte her, in der festgelegt wird, welches die Eingangswerte der Grundoperationen sind. Gleichzeitig stellen wir sicher, dass die Eingangswerte bereits berechnet wurden und den korrekten Typ haben.

<sup>5</sup>Einige typische Operationen auf Punkten, Geraden, Kreisen und Kegelschnitten klassifiziert nach Mehrdeutigkeit: **Eindeutige Operationen:** Schnittpunkt, Verbindungsgerade, Mittelpunkt, Senkrechte, Parallele, Mittelsenkrechte, Kreis mit Mittelpunkt und Randpunkt, Kreis durch drei Punkte, Kegelschnitt durch fünf Punkte. **Zweideutige Operationen:** Schnitt Gerade/Kreis, Schnitt Kreis/Kreis, Schnitt Gerade/Kegelschnitt, Winkelhalbierende, Kegelschnitt mit Brennpunkten durch Randpunkt. **Vierdeutige Operationen:** Schnitt Kegelschnitt/Kegelschnitt, Schnitt Kegelschnitt/Kreis, Tangente an 2 Kreise.

**Definition 2.2** Es sei  $Z$  eine Konstruktion mit Daten wie in Def. 2.1. Eine Instanz von  $Z$  ist ein Element  $o = (o_1, o_2, \dots, o_n) \in O_1 \times O_2 \times \dots \times O_n$ , so dass  $(o_{s_1^i}, o_{s_2^i}, \dots, o_{s_k^i}, o_i) \in \tilde{\omega}_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Die Menge aller Instanzen von  $Z$  bezeichnen wir mit  $\mathbf{I}_Z$ .

Diese Definition bildet einen gemeinsamen Nenner für verschiedene DGS und fasst die wesentlichen Eigenschaften zusammen, die jedes DGS aufweisen sollte. Gleichzeitig führt sie eine klare Trennung von Syntax und Semantik einer Konstruktion durch. Eine Instanz einer Konstruktion ist eine Realisierung der durch die Konstruktionsvorschrift geforderten Bedingungen. Wir werden später auf dieser allgemeinen Ebene das Konzept eines konkreten DGS beschreiben, d.h. das durch das DGS festgelegte Verhalten einer Konstruktion unter Bewegung freier Elemente. Hierzu müssen wir zunächst noch einen Stetigkeitsbegriff einführen.

## 3 Koordinatendarstellungen und Stetigkeit

### 3.1 Objektmengen als topologische Räume

Bislang weisen die Mengen  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{K}$  keinerlei innere Struktur auf und die Grundoperationen konnten im Prinzip durch beliebige Relationen definiert sein. Dies entspricht in keiner Weise der zu modellierenden geometrischen Realität. Die nun folgenden Ausführungen sollen gezielt auf geometriehärente Eigenschaften eingehen, die uns ermöglichen werden, das wünschenswerte Verhalten eines DGS weiter abzugrenzen. Um Begriffe wie „Stetigkeit“ ausdrücken zu können, gehen wir nun zu Koordinaten und Parameterdarstellungen der geometrischen Objekte über.

Wir können die Mengen  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{G}$ , und  $\mathbf{K}$  durch geeignete Definition von  $\varepsilon$ -Umgebungen mit einer Topologie versehen, um darüber einen Stetigkeitsbegriff einzuführen. Betrachten wir die Menge  $\mathbf{P}$  so wäre der naheliegende Zugang, diese mit  $\mathbb{R}^2$  zu identifizieren und mit der üblichen Topologie auszustatten, indem wir jedem Punkt  $p$  seine  $(x, y)$ -Koordinaten zuweisen und  $\varepsilon$ -Umgebungen gemäß  $U_\varepsilon((x_0, y_0)) = \{(x, y) \mid \|(x_0, y_0) - (x, y)\| < \varepsilon\}$  definieren. Obgleich naheliegend, ist diese Definition nicht in allen Punkten zufriedenstellend. Betrachten wir hierzu die Situation des Schnittes  $S$  einer horizontalen Geraden  $l$  mit einer Geraden  $m$ , die um den Punkt  $R$  rotiert. Während der Rotation wandert  $S$  stetig entlang  $l$ , zum Beispiel nach rechts, bis zu dem Zeitpunkt  $t_0$  in dem  $l$  und  $m$  parallel sind. Die Schnittoperation ist dann in der euklidischen Ebene nicht durchführbar. Im nächsten Moment kommt  $S$  dann wieder von links auf  $l$  stetig zu seiner ursprünglichen Lage zurück. Die stetige Bewegung von  $m$  hat also einen unstetigen Sprung von  $S$  zur Folge. Diese Situation ist unbefriedigend, weil es von  $S$  abhängige elementare Grundoperationen geben kann, die bei  $t_0$  lediglich eine hebbare Unstetigkeitsstelle aufweisen. Verbinden wir zum Beispiel  $S$  durch eine Gerade  $k$  mit einem weiteren Punkt  $P$ , so kann die Unstetigkeit mit einer Parallelen zu  $l$  gehoben werden.

Diese Situation ist analog zum Heben von Unstetigkeiten rationaler Funktionen. Beispielsweise ist die Funktion  $f(z) = 1/z$  an der Stelle  $z = 0$  nicht definiert und hat einen unstetigen Polstelle. Die Funktion  $z^2 \cdot f(z) = z^2/z$  hingegen hat bei  $z = 0$  eine hebbare Unstetigkeit. Kompaktifizieren wir  $\mathbb{R}$  durch Hinzufügen eines Elementes  $\infty$  und erweitern die Definition des Divisions-Operators, so können wir die anfängliche Polstelle als einen stetigen Übergang auffassen. Damit wird die Hebung der Singularität auf die Funktion  $f(z)$  zurückgezogen.

In derselben Weise können wir in der geometrischen Situation verfahren und zur euklidischen Ebene Punkte im Unendlichen hinzufügen und den Übergang zur *projektiven Geometrie* vollziehen. Wir werden dies nur implizit in der Definition des Stetigkeitsbegriffes für Bewegungen von Punkten tun.<sup>6</sup> Wir stellen dazu einen Punkt in  $\mathbf{P}$  durch homogene Koordinaten in  $\mathbb{R}^3$  dar und betrachten den aus diesem Raum induzierten Stetigkeitsbegriff. Für einen Vektor  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  mit  $z \neq 0$  definieren wir die Dehomogenisierung  $p_{(x,y,z)} = (x/z, y/z)$ . Der Vektor  $(x, y, z)$  ist also ein Vertreter der homogenen Koordinaten des Punktes  $p_{(x,y,z)}$ . Diese Darstellung ist nicht eindeutig, da  $p_{(x,y,z)} = p_{(\lambda x, \lambda y, \lambda z)}$  für  $\lambda \neq 0$ . Vektoren der Form  $(x, y, 0)$  haben in  $\mathbf{P}$  keine Entsprechung. Sie können aber als Punkte im Unendlichen interpretiert werden, wobei auch hier skalare Vielfache  $\lambda \neq 0$  der homogenen Koordinaten den gleichen unendlich fernen Punkt repräsentieren. Der Vektor  $(0, 0, 0)$  entspricht allerdings weder einem Euklidischen noch einem unendlich fernen Punkt.

Ein *quasi-stetiger Weg* in  $\mathbf{P}$  soll im Prinzip eine stetige Abbildung des Einheitsintervalls  $I = [0, 1]$  auf  $\mathbf{P}$  sein, aber endlich viele Unendlichdurchgänge und Definitionslücken erlauben. Dazu punktieren wir den Definitionsbereich unserer Abbildung geeignet: Für  $k \geq 0$  sei  $\{s_1, s_2, \dots, s_k\} \in ]0, 1[$ . Die Menge  $I' = I - \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$  nennen wir dann ein *punktiertes Einheitsintervall*. Im Folgenden bezeichne  $I'$ , sofern nicht anders angegeben, ein geeignet punktiertes Einheitsintervall.

**Definition 3.1** Eine Abbildung  $\varphi: I' \rightarrow \mathbf{P}$  heißt quasi-stetiger Weg, wenn es eine stetige Funktion  $\psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  gibt mit  $p_{\psi(t)} = \varphi(t)$  für alle  $t \in I'$ .

Diese Definition von Quasi-Stetigkeit stimmt genau mit der üblichen Definition von stetigen Wegen auf  $\mathbf{P}$  überein, bis auf die Tatsache, dass sie (bei den Parameterwerten  $\{s_1, \dots, s_k\}$ ) endlich viele hebbare Definitionslücken und Punktdurchgänge durchs Unendliche zulässt. Stetige Durchgänge durch den Nullpunkt des  $\mathbb{R}^3$  werden hier explizit nicht zugelassen, da diese unstetige Wege in  $\mathbf{P}$  induzieren könnten.

Analog kann man auch die Räume  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{K}$  mit Topologien und Stetigkeitsbegriffen ausstatten und quasi-stetige Wege von Geraden und Kreisen definieren. Nach Einführung von Koordinaten kann man eine Gerade  $g \in \mathbf{G}$  durch drei geeignete Parameter  $(a, b, c)$  beschreiben gemäß  $g = g_{(a,b,c)} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$ . Kreise können wir durch Angabe der Parameter einer Kreisgleichung beschreiben  $k_{(a,b,c,d)} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0\}$ . Beide Darstellungen sind wieder nur bis auf ein skalares Vielfaches  $\lambda \neq 0$  eindeutig.

Stetige Wege in den Parameterräumen  $\mathbb{R}^3$  bzw.  $\mathbb{R}^4$  sollen nun wiederum quasi-stetige Wege in den Räumen  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{K}$  induzieren:

**Definition 3.2** Eine Abbildung  $\varphi: I' \rightarrow \mathbf{G}$  heißt quasi-stetiger Weg, wenn es eine stetige Funktion  $\psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  mit  $g_{\psi(t)} = \varphi(t)$  für alle  $t \in I'$  gibt. Eine Abbildung  $\varphi: I' \rightarrow \mathbf{K}$  heißt quasi-stetiger Weg, wenn es eine stetige Funktion  $\psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$  mit  $k_{\psi(t)} = \varphi(t)$  für alle  $t \in I'$  gibt.

Ist  $o = (o_1, o_2, \dots, o_n) \in \{\mathbf{P}, \mathbf{G}, \mathbf{K}\}^n$  und sind  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  quasi-stetige Wege gleicher Typisierung wie  $o$  und  $\varphi_i(0) = o_i$  für  $i = 1, \dots, n$ , die alle auf dem gleichen punktierten Intervall  $I'$  definiert sind, so nennen wir  $\varphi$  einen quasi-stetigen Weg mit Startpunkt  $o$ . Die Menge aller quasi-stetigen Wege mit Startpunkt  $o$  bezeichnen wir mit  $\Phi_o$ .

Es soll nun untersucht werden, unter welchen Umständen eine Durchgang durch den Nullpunkt des

<sup>6</sup>Wir nehmen also insbesondere nicht an, dass ein DGS grundsätzlich homogene Koordinaten verwenden muss

Parameterraumes  $\mathbb{R}^d$  immer noch quasi-stetiges Verhalten auf den induzierten Objekten in  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{K}$  induziert.

**Theorem 3.3** *Es sei  $\psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  ein stetiger Weg und  $t_0 \in [0, 1]$ . Ferner sei  $A \subseteq \{1, \dots, d\}$  die Indexmenge der Koordinaten von  $\psi$ , die in einer Umgebung von  $t_0$  nicht konstant 0 sind. Gilt nun*

- (i)  $A \neq \emptyset$ ,
- (ii) für alle  $i, j \in A$  hat bei  $t_0$  entweder  $\psi_i(t)/\psi_j(t)$  oder  $\psi_j(t)/\psi_i(t)$  eine stetig hebbare Definitionslücke oder ist stetig,

dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , einen stetigen Weg  $\theta: U_\varepsilon(t_0) \rightarrow \mathbb{R}^d \setminus \{0, \dots, 0\}$ , eine Funktion  $\lambda: U_\varepsilon(t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $\lambda(t) \cdot \theta(t) = \psi(t)$  für  $t \in U_\varepsilon(t_0) \setminus \{t_0\}$ .

BEWEIS. Für  $\psi(t_0) \neq (0, \dots, 0)$  ist die Aussage klar, wir zeigen sie also für  $\psi(t_0) = (0, \dots, 0)$ . Für  $i, j \in A$  setzen wir  $i \prec j$  genau dann wenn  $\lim_{t \rightarrow t_0} \psi_j(t)/\psi_i(t) \notin \mathbb{R}$ . Gilt  $i \not\prec j$  so existiert der reelle Grenzwert  $g := \lim_{t \rightarrow t_0} \psi_j(t)/\psi_i(t) \in \mathbb{R}$  und wegen (ii) besitzt  $\psi_j(t)/\psi_i(t)$  bei  $t_0$  eine hebbare Definitionslücke.

Es gilt ferner  $i \prec j \implies j \not\prec i$  und es gilt  $(i \prec j) \wedge (j \prec k) \implies i \prec k$ . Da  $A$  wegen (i) nicht leer ist, gibt es also ein  $i \in A$  mit  $i \not\prec j$  für alle  $j \in A$ . Somit muss es ein  $\varepsilon > 0$  geben mit  $\psi_i(t) \neq 0$  für alle  $t \in U_\varepsilon(t_0) \setminus \{t_0\}$ . Es sei  $\theta(t) = \psi(t)/\psi_i(t)$  und  $\lambda(t) = \psi_i(t)$  für  $t \in U_\varepsilon(t_0) \setminus \{t_0\}$ . Die Koordinateneinträge  $\theta_j(t) = \psi_j(t)/\psi_i(t)$  von  $\theta(t)$  haben wegen  $i \not\prec j$  alle bei  $t_0$  eine hebbare Unstetigkeit. Nach Heben dieser Unstetigkeit erfüllen  $\varepsilon$ ,  $\theta$  und  $\lambda$  die Konklusion unseres Theorems.  $\square$

Die Bedeutung dieses Theorems im Rahmen unserer Überlegung ist die Folgende: Haben wir im Parameterraum eine stetige Funktion gegeben, die einen Durchgang durch den Koordinatenursprung hat, so induziert diese auf  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{K}$  immer noch einen quasi-stetigen Weg, sofern die Bedingungen des Theorems erfüllt sind.

Analog zu quasi-stetigen Wegen, definieren wir quasi-lineare Wege:<sup>7</sup>

**Definition 3.4** *Eine Abbildung  $\varphi: I' \rightarrow \mathbf{P}$  heißt quasi-linearer Weg, wenn es eine lineare Funktion  $\psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  gibt mit  $p_{\psi(t)} = \varphi(t)$  für alle  $t \in I'$ .*

Insbesondere gilt, dass bei einem quasi-linearen Weg  $\varphi$  eines Punktes alle Bilder  $\varphi(t); t \in I'$  auf einer Geraden liegen. Analoge Definitionen gelten für Geraden und Kreise sowie Wege ganzer Instanzen.

**Bemerkung:** Bei der in der Projektiven Geometrie üblichen Darstellung durch homogene Koordinaten gruppiert man die Vektoren  $(x, y, z)$  durch Äquivalenzklassen gemäß  $(x, y, z) \equiv \lambda(x, y, z)$  für  $\lambda \neq 0$ . Jeder projektive Punkt entspricht dann genau einer Äquivalenzklasse. Wir nehmen in diesem Artikel von dieser Betrachtungsweise Abstand, da wir später die Parameter bewegter Objekte durch analytische Funktionen in  $\mathbb{R}^n$  ausdrücken werden und das Verhalten insbesondere um den Koordinatenursprung des Parameterraumes von besonderer Bedeutung sein wird.

## 3.2 Formale DGS

Bisher haben wir auf rein mengentheoretischer Basis den Begriff einer Konstruktion charakterisiert und beschrieben, was es heißt, eine Instanz einer Konstruktion zu sein. Wir wollen auf dieser

<sup>7</sup>Eigentlich müssten wir von quasi-stetigen linearen Wegen reden.



abstrakten Ebene das Verhalten eines konkreten DGS modellieren. Hierzu müssen wir im Wesentlichen zwei Dinge leisten. Einerseits müssen wir eine saubere Trennung von frei beweglichen und von abhängigen Elementen durchführen. Andererseits müssen wir beschreiben, wie sich die abhängigen Elemente unter der Bewegung der freien Elemente verhalten.

Gegenüber einem auf einem Computer implementierten DGS werden wir hierbei noch eine wesentliche Idealisierung machen. Wir gehen nämlich in der folgenden Modellierung davon aus, dass die freien Elemente *kontinuierliche* Wege beschreiben – im Gegensatz zu der tatsächlichen Situation, in der die Maus lediglich Positionsinformationen zu bestimmten, diskreten Zeitpunkten liefert. Zwischen diesen Stützstellen muss beim Übergang zu der hier beschriebenen idealisierten Modellierung interpoliert werden. Dabei besteht noch eine gewisse Freiheit, welche wir in einem späteren Kapitel noch behandeln (und ausschöpfen) werden.

Wir beschränken uns im Folgenden darauf, dass in einem DGS jedes Element entweder als *vollkommen frei* oder als *abhängig* gelten soll. Den Fall *halbfreier* Punkte (zum Beispiel Punkt auf Gerade oder Punkt auf Kreisrand) werden wir hier nicht behandeln.<sup>8</sup>

Es sei nun  $\underline{\mathcal{G}}$  der Befehlssatz des DGS und  $\mathcal{G}$  enthalte die einstelligen Relationen  $\tilde{\omega}_{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}$ ,  $\tilde{\omega}_{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{G}}$  und  $\tilde{\omega}_{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}$ . Diese drei Operationen erzeugen frei wählbare Punkte, Geraden oder Kreise. Es sei  $\mathcal{Z}$  eine Konstruktion mit Objekten  $(O_1, O_2, \dots, O_n) \in \{\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{K}}\}^n$  und einer Folge von Operationen  $(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \dots, \tilde{\omega}_n) \in \mathcal{G}^n$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die ersten  $k$  dieser Operationen, und *nur* die ersten  $k$  Operationen, Elemente aus  $\{\tilde{\omega}_{\mathbf{P}}, \tilde{\omega}_{\mathbf{G}}, \tilde{\omega}_{\mathbf{K}}\}$  sind. Die Objekte  $O_1, \dots, O_k$  sind die *freien* Elemente der Konstruktion. Alle anderen Elemente heißen *abhängig*.

Die typische Aktion im Zugmodus eines DGS besteht nun darin, ausgehend von einer bestimmten Instanz  $o = (o_1, \dots, o_n)$  von  $\mathcal{Z}$  die freien Elemente zu nehmen, und diese mit der Maus an einen anderen Ort zu bewegen. Das DGS soll hierbei alle abhängigen Elemente nachziehen und für jede Position eine Instanz von  $\mathcal{Z}$  anzeigen. Das Verhalten des DGS ist durch diese Forderung aufgrund der Mehrdeutigkeiten in manchen Grundoperationen noch nicht festgelegt.

**Definition 3.5** *Es sei  $\mathcal{Z}$  eine Konstruktion, deren erste  $k$  Elemente frei sind und  $o = (o_1, \dots, o_n) \in \mathbf{I}_{\mathcal{Z}}$  sei eine Instanz von  $\mathcal{Z}$ . Ferner sei  $f(\mathcal{Z}, o) = (o_1, \dots, o_k)$  die Position der freien Startelemente. Ein formales DGS zu  $(\mathcal{Z}, o)$  ist eine Abbildung  $\mathcal{D}: \Phi_{f(\mathcal{Z}, o)} \rightarrow \mathbf{I}_{\mathcal{Z}}$ , so dass für  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) \in \Phi_{f(\mathcal{Z}, o)}$  und  $o' = (o'_1, \dots, o'_n) = \mathcal{D}(\varphi)$  die Relation  $(\varphi_1(1), \dots, \varphi_k(1)) = (o'_1, \dots, o'_k)$  gilt. Gilt für zwei Wege  $\varphi, \theta \in \Phi_{f(\mathcal{Z}, o)}$  die Identität  $\varphi(t) = \theta(t)$  für alle  $t$  in einem punktierten Einheitsintervall  $I'$  so soll zusätzlich  $\mathcal{D}(\varphi) = \mathcal{D}(\theta)$  gelten.*

Die Ausgangssituation in einem DGS wird also durch Vorgabe einer Konstruktion  $\mathcal{Z}$  und einer passenden Startinstanz  $o$  gegeben. Ein formales DGS ordnet dann jedem quasi-stetigem Weg  $\varphi$  der freien Elemente eine zu  $\mathcal{Z}$  passende Endinstanz  $o'$  zu, bei der die freien Elemente die Endpositionen aus  $\varphi$  einnehmen. In dieser Definition ist eine weitere unscheinbare Grundforderung an ein DGS versteckt.

**Grundforderung 3 (Determinismus):** *Ein DGS soll sich deterministisch verhalten: Bei der Ausführung der gleichen Bewegung von der gleichen Ausgangssituation aus soll man immer in der*

<sup>8</sup>Halbfreie Elemente erfordern entweder zusätzliche Randbedingungen, die vom DGS automatisch hinzugefügt werden (im Idealfall durch den Benutzer beeinflussbar), oder neue Konzepte für die Darstellung und Behandlung zusätzlicher Freiheiten in Konstruktionen.

gleichen Endsituation anlangen.<sup>9</sup>

Nach der obigen Definition kann der Weg der freien Elemente noch die Endposition der Konstruktion beeinflussen: Für zwei Wege  $\varphi, \theta \in \Phi_{f(Z,o)}$  mit  $\varphi(1) = \theta(1)$  kann  $\mathcal{D}(\varphi) \neq \mathcal{D}(\theta)$  gelten. Solche *Monodromie-Effekte* werden bei den meisten DGS vermieden, und wir nennen ein derartiges DGS *konservativ*. Formaler:

**Definition 3.6** *Gilt für ein formales DGS  $\mathcal{D}$  für alle  $\varphi, \theta \in \Phi_{f(Z,o)}$  mit  $\varphi(1) = \theta(1)$  immer  $\mathcal{D}(\varphi) = \mathcal{D}(\theta)$  so, heißt  $\mathcal{D}$  konservativ.*

Insbesondere gilt für ein konservatives formales DGS, dass für eine Bewegung einer Konstruktion  $Z$  von einer Instanz  $o$  zu einer Instanz  $p$  mit  $f(Z, o) = f(Z, p)$  schon  $p = o$  gilt. Diese Tatsache macht die „Navigation“ in einem tatsächlichen DGS mit konservativem Verhalten einfacher, da man zu jeder einmal erreichten Position einfach zurückkehren kann. Oft wird daher aus didaktischen und softwareergonomischen Erfordernissen Konservatismus gefordert.<sup>10</sup>

Wir werden allerdings später sehen, dass dieser vermeintliche Vorteil auch erhebliche Nachteile mit sich bringt, da durch die Eindeutigkeit der Operationen viele Instanzen niemals erreicht werden können. Die mathematische Gesamtheit der zu einer Konstruktion gehörigen Instanzen, ihr „Konfigurationsraum“, ist unvollständig und kann nicht erfahren werden. Dies hat in der Praxis den Effekt, dass zum Beispiel manche Ortskurven nicht vollständig berechnet werden oder komplexere Konstruktionen nur in einem kleinen Bereich gültig sind.

Ein formales DGS  $\mathcal{D}$  zu einem Konstruktion/Startinstanz-Paar  $(Z, o)$  gibt uns also die „Zielinstanz“  $\varphi(1)$  für quasi-stetige Wege  $\varphi \in \Phi_{f(Z,o)}$  an. Dadurch kennen wir aber auch den gesamten Weg der abhängigen Elemente, also die Position  $\varphi(t)$  für jeden Zeitpunkt  $t \in I'$  in dem punktiertem Definitionsintervall  $I' = [0, 1] - \{s_1, \dots, s_k\}$ . Dazu fassen wir  $I' \cap [0, t]$  als ein skaliertes punktiertes Einheitsintervall auf. Das formale DGS  $\mathcal{D}$  legt fest, wie sich die abhängigen Elemente der Konstruktion bis zu diesem Zeitpunkt verhalten haben müssen. Als Hilfsmittel setzen wir für  $M \subset \mathbb{R}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  die skalierte Menge  $\lambda \cdot M = \{\lambda x \mid x \in M\}$  und definieren:

**Definition 3.7** *Sei  $(Z, o)$  ein Konstruktion/Startinstanz-Paar und  $\mathcal{D}$  ein zugehöriges formales DGS.  $(O_1, \dots, O_n)$  sei die Typisierung von  $Z$ . Für einen quasi-stetigen Weg  $\varphi \in \Phi_{f(Z,o)}$  mit punktiertem Definitionsintervall  $I'$  definieren wir Funktionen  $\varphi_{k+1}^{\mathcal{D}}: I' \rightarrow O_{k+1}, \dots, \varphi_n^{\mathcal{D}}: I' \rightarrow O_n$  gemäß:*

$$\varphi_i^{\mathcal{D}}(t) = \mathcal{D}(\varphi_t)_i,$$

wobei

$$\begin{aligned} \varphi_t: (1/t) \cdot (I' \cap [0, t]) &\rightarrow (O_1, \dots, O_k) \\ t' &\mapsto \varphi(t' \cdot t) \end{aligned}$$

der auf  $[0, 1]$  umskalierte Weg der freien Elemente in  $I \cap [0, t]$  ist.

Auch diese Definition wollen wir wieder umgangssprachlich deuten. Für ein gegebenes  $\mathcal{D}$  und einen Weg  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$  der freien Elemente gibt die Funktion  $\varphi_i^{\mathcal{D}}(t)$  für  $i > k$  an, wo sich das abhängige Element  $o_i$  zum Zeitpunkt  $t$  befindet. Es ist an dieser Stelle wichtig zu bemerken, dass die Wegfunktionen  $\varphi_i(t)$  der abhängigen Elemente nicht quasi-stetig sein müssen.

<sup>9</sup>Man beachte, dass diese Definition nicht der Definition von Determinismus in Kortenkamp (1999) entspricht.

<sup>10</sup>Außerdem vereinfacht sich auch die Implementierung eines konservativen DGS dadurch, dass für jede Grundoperation eine feste Rechenvorschrift programmiert werden muss. Für die Neuberechnung einer Instanz muss nur die Liste der Grundoperationen einer Konstruktion abgearbeitet werden, was sehr effizient durchgeführt werden kann.

### 3.3 Stetige Verformungen einer Konstruktion

Wir kommen nun zu unserer vierten Grundforderung an ein DGS, welche besagen soll, dass eine kontinuierliche Veränderung der Eingabeparameter eine kontinuierliche Veränderung der Ausgabe-parameter zur Folge haben soll. Dies ist eine erweiterte Formulierung des Wunsches nach Objekt-identität: Unter kontinuierlicher Bewegung der freien Elemente einer Konstruktion sollen abhängige Elemente nicht spontan von einer Stelle zur anderen springen.<sup>11</sup>

Hierbei ist zu beachten, dass die Formulierung einer solchen Stetigkeitsforderung der Tatsache Rechnung tragen muss, dass manche Operationen für viele Eingabewerte nicht durchführbar sind. Es muss also möglich sein, dass Objekte einer Konstruktion für „eine Weile“ verschwinden, um später (an eventuell anderer Position) wieder zu erscheinen. Ferner werden wir noch sehen, dass man auch an die Art der erlaubten Wege der Eingangsparameter recht strenge Forderungen stellen muss, um quasi-stetige Wege der abhängigen Objekte zu erhalten.

**Grundforderung 4 (Kontinuität):** *Für eine Konstruktion sollen unter einem linearen Weg der freien Elemente die Wege der abhängigen Elemente keine nichthebbaren Unstetigkeiten enthalten.*

Mit den bisher eingeführten Begriffen können wir diese Forderung folgendermaßen formalisieren:

**Definition 3.8** *Es sei  $(Z, o)$  eine Konstruktion mit Startinstanz  $o$  und  $\mathcal{D}$  ein zugehöriges formales DGS.  $\mathcal{D}$  heiÙe kontinuierliches formales DGS wenn die folgende Forderung erfüllt ist: Für jeden quasi-linearen Weg  $\varphi \in \Phi_{f(Z, o)}$  mit Definitionsintervall  $I'$  gibt es quasi-stetige Wege  $\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n$  auf  $I'$  mit der folgenden Eigenschaft  $\varphi_i(t) = \varphi_i^{\mathcal{D}}(t)$  für alle  $t \in I'$  mit  $\varphi_i^{\mathcal{D}}(t) \neq *$ .*

In einem kontinuierlichen DGS dürfen also bei linearer Bewegung der freien Elemente die abhängigen Elemente keine unstetigen Sprünge durchführen. Sie dürfen aber für ein ganzes Intervall der Bewegung den Zustand *nicht-durchführbar* annehmen, um dann an anderer Stelle wieder aufzutau-chen. Die obige Definition suggeriert zwar, dass während eines solchen Intervalls den Elementen auch noch reale Entsprechungen  $\varphi_i(t)$  zugeordnet werden könnten. Dies ist allerdings im Allge-meinen nicht der Fall, sondern ein rein technisches Hilfsmittel. Später werden wir sehen, dass sich solche Entsprechungen in der Tat finden lassen, aber nur über komplexen Zahlenbereichen.

Es mag zunächst befremdlich erscheinen, dass in der Definition von Kontinuität lediglich das Ver-halten auf quasi-linearen Wegen und nicht auf quasi-stetigen Wegen als Eingangsvariation berück-sichtigt wird. Würde die Definition aber auf allgemeinen quasi-stetigen Wegen aufbauen, so könnten wir nicht erwarten, dass es überhaupt nicht-triviale kontinuierliche formale DGS gibt, wie die Über-legungen in Abschnitt 5 zeigen. Zudem schränkt uns die geforderte Linearität unter praktischen Aspekten nicht ein, da wir sowieso die vom Computer erfasste diskrete Folge von Mauspositionen interpolieren müssen, und es ist sowohl problemlos als auch gerechtfertigt, dies durch stückweise lineare Funktionen zu tun.

---

<sup>11</sup>Diese Forderung erscheint nicht nur Mathematikern als „natürlich“. Dies liegt daran, dass kontinuierliches Verhalten dem entspricht, was wir *in der Natur* beobachten. Normalerweise – auf der makroskopischen Ebene – verschwindet ein Objekt nicht plötzlich, um an anderer Stelle wieder aufzutau-chen. Tatsächlich scheint Kontinuität eine Grundbe-dingung dafür zu sein, mit einem DGS einfaches *physikalisches* Verhalten zu modellieren.

## 4 Kontinuität

Die Forderung nach Stetigkeit wie in Grundforderung 4 und der letzten Definition ist sehr stark, und lässt sich nur erfüllen, wenn die Grundoperationen in gewisser Weise „gutartig“ sind. Notwendig ist natürlich, dass die Grundoperationen selbst keinerlei Unstetigkeitsstellen aufweisen. Dies ist aber nicht hinreichend, und tatsächlich muss gefordert werden, dass die Grundoperationen durch *algebraische Funktionen* darstellbar sind. Dann und genau dann gelingt *immer* die Beschreibung eines kontinuierlichen formalen DGS. Die folgenden Ausführungen sollen diesen Umstand herausarbeiten.

### 4.1 Algebraische Grundoperationen

Wir untersuchen nun, welche Bedingungen an Grundoperationen zu stellen sind, so dass sich zu *jeder* Konstruktion/Startinstanz-Paar eine *kontinuierliches* formales DGS finden lässt. Die dazu nötigen Restriktionen sind relativ schwach und werden von praktisch allen gängigen Grundoperationen auf Punkten, Geraden und Kreisen erfüllt. Für die folgende Definition arbeiten wir auf der Ebene von homogenen Parameterdarstellungen der Mengen  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{K}$  in  $\mathbb{R}^3$  bzw.  $\mathbb{R}^4$ .

**Definition 4.1** *Es sei  $\omega \in I_1 \times \dots \times I_k \times O$  eine Grundoperation. Gibt es Polynome  $F_1, \dots, F_j \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$ ,  $m$  passend, so dass für alle Eingabeobjekte  $(o_1, \dots, o_k, o) \in I_1 \times \dots \times I_k \times O$  mit zugehörigen Parametern  $\bar{o}_1, \dots, \bar{o}_k, \bar{o}$  aus  $\mathbb{R}^3$  bzw.  $\mathbb{R}^4$  gilt, dass*

$$(o_1, \dots, o_k, o) \in \omega \iff [F_i(\bar{o}_1, \dots, \bar{o}_k, \bar{o}) = 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, j],$$

so nennen wir  $\omega$  algebraisch.

Eine algebraische Grundoperation lässt sich also als Nullstellenmenge eines polynomialen Gleichungssystems beschreiben. Wegen der Parametrisierung über homogenen Koordinaten können wir zusätzlich davon ausgehen, dass die Polynome selber homogen in den Koordinaten der beteiligten Objekte sind, es gilt also mit  $F_i(\bar{o}_1, \dots, \bar{o}_k, \bar{o}) = 0$  auch  $F_i(\lambda_1 \bar{o}_1, \dots, \lambda_k \bar{o}_k, \lambda \bar{o}) = 0$  für  $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda \in \mathbb{R}$ . Wie schon in Abschnitt 2.3 beschrieben, sind Grundoperationen normalerweise derart, dass sie, außer in degenerierten Situationen, zu gegebenen Eingabeobjekten nur eine endliche Anzahl von möglichen Ausgabeobjekten gestatten. Auf homogene Gleichungssysteme übertragen heißt dies, dass bis auf degenerierte Situationen für gegebene Eingangswerte  $\bar{o}_1, \dots, \bar{o}_k$  die Lösungsmenge

$$L_\omega(\bar{o}_1, \dots, \bar{o}_k) := \{ \bar{o} \mid F_i(\bar{o}_1, \dots, \bar{o}_k, \bar{o}) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, j \}$$

aus nur endlich vielen Geraden<sup>12</sup> durch den Ursprung besteht. Jede dieser Geraden entspricht hierbei einem einzigen Objekt in der Ausgabemenge von  $\omega$ . Die Menge vom möglichen Eingabewerten für die diese Endlichkeitsbedingung nicht zutrifft bildet eine Untervarietät des Raumes der Eingangsparameter. Algebraische Grundoperationen, die für fast jede Wahl der Eingabeparameter die Endlichkeitsbedingung erfüllen nennen wir *diskrete algebraische Grundoperationen*. Die Anzahl der Geraden in  $L_\omega(\bar{o}_1, \dots, \bar{o}_k)$  nennen wir deren *homogene Mächtigkeit* und bezeichnen sie mit  $|L_\omega(\bar{o}_1, \dots, \bar{o}_k)|_h$ .

---

<sup>12</sup>Geraden im  $\mathbb{R}^3$  bzw.  $\mathbb{R}^4$ , nicht aus  $\mathbf{G}$

**Beispiele:** Die üblicherweise betrachteten Objekte eines DGS (Geraden, Kreise, Kegelschnitte, Algebraische Kurven) lassen sich als Lösungsgebilde von Polynomen charakterisieren, also sind Schnittoperationen zwischen derartigen Gebilden algebraische Grundoperationen. Ebenso lassen sich Operationen wie Mittelpunkt, Winkelhalbierende, Senkrechte, Parallele als Lösungsmengen von Polynomgleichungen niederschreiben. Nicht-algebraisch ist hingegen die Abstandsfunktion zweier Punkte, wenn man nur positive Abstände zulässt. Sie wird allerdings sofort algebraisch, wenn man zu jedem Abstand  $d$  auch noch  $-d$  als Ausgabewert zulässt.<sup>13</sup>

Der Übergang von allgemeinen Grundoperationen zu diskreten algebraischen Grundoperationen ermöglicht eine überaus wichtige Erweiterung der Sichtweise auf Konstruktionen und DGS. Genau wie man beim Studium von Polynomen ein viel besseres Verständnis für die tieferen Zusammenhänge erhält, wenn man vom reellen Zahlenkörper auf die komplexen Zahlen übergeht, ist dies auch für DGS der Fall. Ein univariates Polynom vom Grad  $d$  über  $\mathbb{R}$  hat zum Beispiel nicht notwendig eine Nullstelle über  $\mathbb{R}$ , wohl aber im algebraischen Abschluss  $\mathbb{C}$ , unter Berücksichtigung der Vielfachheiten sogar  $d$  Stück. Genauso ist die Grundoperation „Schnitt von Kreis und Gerade“ in der reellen Menge  $\mathbf{P}$  nicht durchführbar, wenn Gerade und Kreis sich nicht schneiden, das dazugehörige polynomiale Gleichungssystem lässt aber dennoch komplexe Lösungen zu. Die Erweiterung der Betrachtungen auch auf komplex koordinatisierte Objekte gibt uns ein in sich geschlosseneres Bild der durch eine Konstruktion gegebenen Situation. Wir können sogar konsequenterweise als Eingangsgrößen für die freien Elemente einer Konstruktion komplexe Koordinaten zulassen. Die Grundoperationen bleiben immer noch algebraisch sinnvoll durchführbar.

Zunächst benutzen wir diese Erweiterung des begrifflichen Horizonts, um uns ein genaueres Bild von den nicht-degenerierten Situationen einer einzelnen Grundoperation zu machen. Es sei also  $\omega$  eine diskrete algebraische Grundoperation und  $F_1, \dots, F_k$  das dazu gehörige Polynomsystem. Ein Eingabewert  $(\bar{o}_1, \dots, \bar{o}_k)$  heiße *nicht-degeneriert* auf  $\omega$  falls für jede Wahl der Eingabewerte in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $(\bar{o}_1, \dots, \bar{o}_k)$  die Zahl  $|L_\omega(\bar{o}_1, \dots, \bar{o}_k)|_h$  endlich ist, wobei wir komplexe Lösungen in die Zählung einbeziehen. Es lässt sich (als eine Folge des Satzes von Bézout) zeigen, dass diese Zahl für alle nicht-degenerierten Werte des gleichen Gleichungssystems konstant ist. Wir nennen diese Zahl die *Bézout-Zahl* der Grundoperation. Der Schnitt zweier Geraden hat Bézout-Zahl 1, der Schnitt zweier Kegelschnitte hat Bézout-Zahl 4. Der Schnitt zweier Kreise hat ebenso Bézout-Zahl 4, wenngleich auch zwei der möglichen Schnittpunkte immer komplex sind.<sup>14</sup>

Für eine ausführliche Darlegung der Zusammenhänge von Polynomen und der Mächtigkeit von Lösungsgebilden verweisen wir auf *Brieskorn/Knörrer (1981)*. Eine genauere Analyse der algebraischen Struktur diverser geometrischer Grundoperationen, insbesondere unter der Einbeziehung komplexer Lösungen, findet sich in *Kortenkamp/Richter-Gebert (2000b)*. Eine zu  $\omega$  gehörende Relation  $\tilde{\omega}$  (welche auch nicht-darstellbare Elemente einbezieht) sollte sowohl in degenerierten Situation als auch wenn die Zahl der reellen Lösungen kleiner als die Bézout-Zahl ist, die Ausgabe  $*$  ermöglichen, um eventuelle komplexe Lösungen als „nicht-darstellbar“ zu kennzeichnen, allerdings auch nur dann, da sonst das jetzt folgende Hauptresultat trivial wird.

<sup>13</sup>Allgemein können Grundoperationen, die Orientierungsinformation verwenden, nicht algebraisch sein. Die stetige Behandlung von Orientierungsinformation ist ein Problem für sich, welches wir in diesem Artikel nicht weiter ansprechen.

<sup>14</sup>Wir können jeden Schnitt zweier Kreise in das Auffinden der „Radikalgerade“ der beiden Kreise (Bézout-Zahl 1) gefolgt von einer Schnittoperation zwischen dieser Gerade und einem der Kreise zerlegen. Wir vermeiden somit das Erzeugen unnötiger komplexer Schnittpunkte.

Ist eine Konstruktion  $\mathcal{Z}$  nur aus freien Elementen und diskreten algebraischen Grundoperationen aufgebaut, so nennen wir eine Instanz von  $\mathcal{Z}$  nicht-degeneriert, wenn die Eingabeparameter jedes beteiligten Konstruktionsschrittes nicht-degeneriert sind. Die Parameter der Instanzen einer solchen Konstruktion ergeben sich aus den möglichen Lösungen des polynomialen Gleichungssystems, welches durch Vereinigung aller Gleichungssysteme der einzelnen Konstruktionsschritte entsteht. Somit ist letztlich die Parametermenge, welche Instanzen einer Konstruktion induziert, eine algebraische Varietät. Eine Konstruktion stetig zu verändern entspricht dem stetigen „Navigieren“ auf dieser Varietät.

**Theorem 4.2** *Ist eine Konstruktion  $\mathcal{Z}$  nur aus freien Elementen und diskreten algebraischen Grundoperationen aufgebaut und ist  $o$  eine nicht-degenerierte Instanz von  $\mathcal{Z}$ , so gibt es zu  $(\mathcal{Z}, o)$  ein kontinuierliches formales DGS.*

Was müssen wir für dieses Theorem überhaupt beweisen, und wo liegt die Schwierigkeit? Ein kontinuierliches formales DGS fordert die Existenz quasi-stetiger Wege für die abhängigen Elemente, sofern die Eingangsparameter quasi-linear verändert werden. Dies ist trivialerweise lokal immer dann möglich, wenn die Ausgabe  $*$  als Ergebnis für die abhängigen Elemente zur Verfügung steht. Der zu vermeidende Fall muss also wie folgt beschrieben werden: Zu einer Grundoperation  $\tilde{w}$  bezeichne  $A_x$ ,  $x \in [0, 1]$  die Menge der möglichen Ausgabewerte an der Stelle  $x$  für einen gegebenen quasi-linearen Weg, der an der Stelle  $t \in I \setminus I'$  punktiert ist. Wir betrachten nun  $A_x$  in einer Umgebung  $U_\varepsilon(t)$  und nehmen an, dass bis  $t - \varepsilon$  bereits ein quasi-stetiger Weg gefunden wurde. Wenn für  $A_x$  mit  $x \in U_\varepsilon(t) \cap \{x \mid x > t\}$  gilt, dass  $*$  nicht in  $A_x$  enthalten ist, so *muss* dieser quasi-stetige Weg über  $t$  hin fortgesetzt werden, und zwar durch Elemente aus den  $A_x$ , und die Punktierung muss, um Bedingung (ii) aus Theorem 3.3 zu erfüllen, *chordal*, also auf der Riemannschen Zahlenkugel, stetig durch den Grenzwert des bekannten Wegstücks vor  $t$  gehoben werden.

Man sollte den Beweis also unter dem Aspekt, dass nicht nach Belieben das  $*$ -Element zugeordnet werden kann, lesen. Ansonsten können wir schlimmstenfalls sogar jede Sprungstelle durch Auslöschung der abhängigen Elemente in einer Umgebung „entschärfen“ – damit wäre ein beliebiges Springen der Ausgabeelemente erlaubt (und quasi-stetig!). Wir werden später sehen, dass die hinter den Konstruktionen verborgene komplexe Struktur auch in seltenen Fällen das Fortführen eines bestimmten Lösungszweiges mathematisch als wenig sinnvoll erscheinen lassen, obwohl auf den ersten Blick eine stetige Fortsetzung existiert, siehe dazu auch Abschnitt 5 und die in 4.2.1 folgenden Betrachtungen über globale Konsistenz.

**BEWEIS VON THEOREM 4.2.** Wir müssen zeigen, dass es für jeden von  $o$  ausgehenden quasi-linearen Weg der freien Elemente eine stetige und mit der Konstruktion konsistente Fortführung der abhängigen Elemente gibt. Wir führen unsere Überlegungen vollständig auf der Ebene der beteiligten Parameter durch. Die Konsistenz mit unseren Konzepten auf Instanzenebene ergibt sich direkt aus den Definitionen. Wir fassen für die folgenden Überlegungen die Parameter der freien Elemente zu einem einzigen Punkt in einem hochdimensionalen Raum  $\mathbb{C}^n$  auf, komplexe Eingabewerte seien also gestattet. Entsprechend fassen wir die Koordinaten der abhängigen Elemente als Punkt in einem Raum  $\mathbb{C}^m$  auf. Ein linearer Weg  $\psi$  im Kontrollraum  $\mathbb{C}^n$  lässt sich nun schreiben als  $\psi(t) := t \cdot B + (1 - t) \cdot A$  wobei  $A \in \mathbb{C}^n$  die Startposition und  $B \in \mathbb{C}^n$  die Endposition angibt. Für festes  $t$  ergeben sich dann die potentiellen Parameterwerte der abhängigen Objekte als Lösungsgelbe unseres Gleichungssystems. Es sei  $K \subset \mathbb{C}$  der Körper aller komplexen Zahlen, die algebraisch abhängig von den Einträgen in den Vektoren  $A$  und  $B$  sind.

Zu den durch die Grundoperationen der Konstruktion gegebenen Polynomen fügen wir nun noch für jedes abhängige Objekt eine affine Gleichung in unser System hinzu, welche erzwingt, dass dessen Koordinatenvektor auf einer affinen Ebene liegt (also z.B. für einen Punkt mit den homogenen Koordinaten  $(x, y, z)$  die Gleichung  $h_x x + h_y y + h_z z = 1$ ). Diese zusätzlichen Gleichungen verändern nichts an der geometrischen Interpretation der Grundoperationen. Sie sorgen lediglich dafür, dass im Allgemeinen der Parametervektor eines Objektes *dehomogenisiert* wird, d.h., dass es zu dem Objekt nur noch *einen* repräsentierenden Koordinatenvektor gibt. Um zu bewirken, dass diese Hyperebenen für unsere nachfolgenden Betrachtungen in hinreichend allgemeiner Lage sind, wählen wir  $h_x, h_y, h_z \in \mathbb{C} \setminus K$ , also algebraisch unabhängig von den in den Vektoren  $A$  und  $B$  vorhandenen Einträgen. Für eine gegebene nicht-degenerierte Wahl von  $t \in K$ , ergeben sich somit nur endlich viele Punkte im  $\mathbb{C}^m$ , die alle Polynome in unserem System gleichzeitig erfüllen. Dies gilt selbst noch in einer hinreichend kleinen Umgebung  $U_\varepsilon(t)$ .

Verträglich zur Startinstanz wählen wir nun für die abhängigen Elemente einen Punkt  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  in  $\mathbb{C}^m$  aus, der im Lösungsgebilde des polynomialen Gleichungssystems liegt. Die Tatsache, dass  $o$  nicht-degeneriert war, bewirkt, dass  $(\psi_1(0), \dots, \psi_n(0), \alpha_1, \dots, \alpha_m)$  keine Singularität und kein Verzweigungspunkt des Lösungsgebildes ist. Verändern wir nun  $t$  stetig, so können wir  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  als Keime von Zweigen analytischer Funktionen  $\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t)$  auffassen. Da diese Funktionen die Lösungsgebilde eines polynomialen Gleichungssystems darstellen, sind alle  $\alpha_i(t)$  analytische Funktionen mit endlich vielen Singularitäten oder Verzweigungspunkten. Die auftretenden Singularitäten sind entweder hebbar, oder Polstellen. Nicht-isolierte Singularitäten können nicht auftreten, da alle beteiligten Funktionen algebraisch sind.

Wäre nun der Pfad  $\psi(t)$  derart, dass die  $\alpha_i(t)$  bei analytischer Fortsetzung keinen Verzweigungspunkt treffen, so könnten wir die Funktionen  $\alpha_i(t)$  einfach durch analytische Fortsetzungen bestimmen. Diese Funktionen und auch Quotienten solcher Funktionen wären dann notwendig stetig auf der Riemannschen Zahlenkugel, und würden ein stetiges Verhalten der abhängigen Objekte in  $\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{G}}$  und  $\tilde{\mathbf{K}}$  gemäß Definition 3.7, Definition 3.1 und Theorem 3.3 induzieren. Leider können wir nicht davon ausgehen, dass kein Verzweigungspunkt getroffen wird, da durch die Forderung, dass  $t$  das *reelle* Intervall  $[0, 1]$  durchläuft, oftmals der Weg zwangsläufig durch Verzweigungspunkte der Funktionen  $\alpha_i(t)$  geführt wird.<sup>15</sup>

Um dies zu „umgehen“ – im wahrsten Sinne des Wortes – nutzen wir den komplexen Parameterbereich aus und lassen für  $t$  beliebige Werte in  $\mathbb{C}$  zu. Da wir beim Auftreten mehrerer Verzweigungspunkte das Intervall  $[0, 1]$  in mehrere Teilintervalle unterteilen und  $\psi$  aus mehreren umparametrisierten Teilwegen zusammensetzen können, die je nur einen Verzweigungspunkt enthalten, können wir den Beweis auf die Behandlung eines Verzweigungspunktes  $t' \in [0, 1]$  reduzieren. Die Stelle  $t'$  muss algebraisch abhängig von den Einträgen in  $A$  und  $B$  sein, da  $t'$  sich aus diesen durch algebraische Operationen (inklusive der Nullstellenberechnung von Polynomen) berechnen lässt. Durch die Wahl der affinen Schnitthyperebenen können wir davon ausgehen, dass  $t'$  nicht gleichzeitig eine der Polstellen der  $\alpha_i(t)$  ist. Durch schrittweises Auflösen des Gleichungssystems (z.B. durch iterative Anwendung von Resultanten) erhalten wir Polynome  $q_i \in \mathbb{C}[t, \alpha_i]$ , welche implizit die Abhängigkeit der  $\alpha_i$  von  $t$  durch  $q_i(t, \alpha_i) = 0$  beschreiben.

Wir erzeugen nun den gewünschten von  $t$  durchlaufenen Weg entlang des Intervalls  $[0, 1]$  durch stetige Verformung eines singularitätenfreien Weges. Wir betrachten hierzu die Funktion  $t(\varepsilon, \tau) =$

<sup>15</sup>Zieht man beispielsweise eine Gerade, die einen Kreis schneidet, aus dem Kreis heraus, so durchlaufen die Koordinaten der Schnittpunkte einen Verzweigungspunkt in der Tangentialsituation.

$\tau + i \cdot \varepsilon \cdot \tau \cdot (1 - \tau)$ . Durchläuft  $\tau$  das reelle Intervall  $[0, 1]$ , so beschreibt für feste  $\varepsilon$  die Funktion  $t(\varepsilon, \tau)$  einen Bogen durch  $\mathbb{C}$  von 0 nach 1. Für  $\varepsilon = 0$  läuft  $t(\varepsilon, \tau)$  auf der reellen Gerade. Für ein hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  können die Funktionen  $\alpha_i(t)$  entlang  $t = t(\varepsilon, \tau)$  aus dem Keim  $\alpha_i(0)$  heraus analytisch fortgesetzt werden, da keine Verzweigungspunkte getroffen werden. Wir müssen zeigen, dass die auf den abhängigen Objekten induzierten Pfade im Grenzübergang keine unstetigen Sprünge induzieren. Da die Werte der  $\alpha_i$  die *homogenen* Koordinaten der abhängigen Objekte darstellen, müssen wir (nach Definition 3.1 und Theorem 3.3) zeigen, dass im Grenzübergang die Koordinaten-Quotienten  $\alpha_i(t)/\alpha_j(t)$  chordal stetig (d.h. auf der Riemannschen Zahlenkugel stetige) Funktionen sind. Hierzu genügt es zu zeigen, dass die durch  $\psi(t(\varepsilon, \tau))$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegebene Verformung des Weges in einen Verzweigungspunkt hinein keine Unstetigkeiten des betrachteten Quotienten verursacht.

Da die  $\alpha_i(t)$ , implizit gegeben durch die Polynome  $q_i(t, \alpha_i)$ , Zweige algebraischer Funktionen sind, besitzen diese im Verzweigungspunkt  $t'$  eine Auflösung in Form einer Puiseux-Folge. Das heißt, es gibt ein  $p \in \mathbb{N}$ , so dass in einer Umgebung von  $t'$  die mehrblättrige Funktion  $\alpha_i(t)$  als

$$\alpha_i(t) = \sum_{k=0}^r a_k (t - t')^{\frac{k}{p}}$$

geschrieben werden kann (*Brieskorn/Knörrer 1981, Kapitel 8*). Die ganze Mehrdeutigkeit von  $\alpha_i(t)$  um  $t'$  ist in dem Ausdruck  $(t - t')^{\frac{1}{p}}$  „gekapselt“. Umläuft man mit  $t$  den Verzweigungspunkt  $t'$  in einer kleinen Umgebung  $p$  mal und verfolgt dabei  $\alpha_i(t)$  durch analytische Fortsetzung, so legt  $\alpha_i(t)$  einen geschlossenen Weg zurück. Analog schreiben wir

$$\alpha_j(t) = \sum_{k=0}^{r'} b_k (t - t')^{\frac{k}{q}}.$$

Wie verhält sich nun der Quotient  $\alpha_i(t)/\alpha_j(t)$ ? Um dies zu sehen, substituieren wir  $z(t) = (t - t')^{\frac{k}{p \cdot q}}$ . Die Wege  $\psi(t(\varepsilon, \tau))$  mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  induzieren eine Verformung des Weges  $z(t)$  in den Nullpunkt hinein. Der Quotient

$$\frac{\alpha_i(t)}{\alpha_j(t)} = \frac{\sum_{k=0}^r a_k z(t)^{qk}}{\sum_{k=0}^{r'} b_k z(t)^{pk}}$$

ist nun Quotient zweier Polynome und ist somit auch im Punkt  $t = t'$  chordal stetig. Dies zeigt, dass im Grenzübergang die induzierten Wege der abhängigen Objekte stetig in  $\mathbb{C}^m$  sind. Werden die homogenen Koordinaten der abhängigen Objekte komplex, wird in  $\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{K}}$  das jeweilige \*-Element induziert. Ist ein abhängiges Objekt für  $t < t'$  reell, so geht dessen Pfad entweder stetig in einen reellen Pfad für  $t > t'$  über, oder die Parameter werden auf einem ganzen Intervall komplex und induzieren das \*-Element. Ein unstetiges Springen ist bei den durch stetige Verformung erzeugten Pfaden nicht möglich. Dies beweist Theorem 4.2.  $\square$

## 4.2 Interpretation dieses Resultates

Das Ergebnis und die Überlegungen des letzten Abschnitts können auf vielfältige Art und Weise interpretiert werden. Einerseits bedeutet es, dass das auf einem Computerbildschirm gezeigte reelle Verhalten eines DGS nur ein unvollständiges Bild des gesamten mathematischen Inhaltes einer Konstruktion angibt. Insbesondere „verschwindende Schnitte“ (z.B. von disjunkten Geraden und



Kreisen) beinhalten wesentlich mehr Information, als man wahrnimmt. Will man ein stetiges und konsistentes Verhalten eines (realen) DGS erreichen so sollten diese Elemente, obwohl sie nicht angezeigt werden, als „komplexe Schatten“ mitgeführt werden.

Ferner sagt uns dieses Ergebnis, dass bei einer Bewegung im Zugmodus eines DGS bei stetigem Verhalten nicht nur die Endsituation über die gezeigte Instanz bestimmt. Vielmehr hat der Weg, den man von einer Startsituation aus nimmt, entscheidenden Einfluss. Dies stimmt sogar dann noch, wenn die komplette Bewegungssituation auf *einen* Parameter  $t$  reduziert worden ist. Selbst dann entscheidet immer noch die relative Windungszahl in  $\mathbb{C}$  des Weges von  $t$  um die Verzweigungspunkte über die erreichte Endinstanz. Gleichzeitig liegt in der genauen Wahl dieses Weges auch eine gewisse Freiheit mit, der man das Verhalten eines DGS entscheidend modellieren kann. Das im Beweis zum Theorem 4.2 betrachtete Verfahren der stetigen Verformung analytischer Wege stellt also *eine* Methode zum Erzeugen konsistenter Entscheidungen für die einzelnen Parameterfunktionen der abhängigen Elemente dar.

#### 4.2.1 Globale Konsistenz

Der von uns im Beweis beschriebene Grenzübergang bewirkt gewissermaßen eine gezielte Auswahl des Zweiges, auf dem nach Durchlaufen eines Verzweigungspunktes weitergelaufen werden soll. Da der Steuerparameter  $t$  für alle Teile der Konstruktion *gleichzeitig* benutzt wird, und auch der Grenzübergang für alle Konstruktionsteile *gleichzeitig* durchgeführt wird, erreichen wir damit aber auch eine gewisse globale Konsistenz.

**Definition 4.3** *Ein für  $(Z, o)$  angegebenes kontinuierliches formales DGS  $\mathcal{D}$  heißt global konsistent, wenn sich für jedes  $(Z, o)$  umfassende Konstruktion/Startinstanz-Paar  $(Z', o')$  das Verhalten von  $\mathcal{D}$  zu einem kontinuierlichen DGS  $\mathcal{D}'$  für  $(Z', o')$  ergänzen lässt.*

Es ist durchaus möglich, für bestimmte Paare  $(Z, o)$  kontinuierliche DGS anzugeben, die nicht global konsistent sind. Dies geht immer dann, wenn die zugehörige Konstruktion in verschiedenen Teilen der Konstruktion an der gleichen Stelle des Parameterraumes Verzweigungspunkte aufweist, die nicht direkt voneinander konstruktiv abhängen. Hier könnte man prinzipiell in beiden Teilen unterschiedliche Entscheidungen treffen, die der Kontinuität nicht direkt widersprechen. Erst eine weitere Ergänzung der Konstruktion könnte eine mathematische Unstimmigkeit offenlegen.

Das Theorem des letzten Kapitels lässt sich dahingehend verschärfen, dass man auch noch globale Konsistenz fordert.

**Theorem 4.4** *Das im letzten Abschnitt konstruierte formale DGS ist global konsistent.*

BEWEIS. Zum Beweis muss man lediglich beachten, dass bei der Konstruktion der durchlaufenen Pfade im Beweis von Theorem 4.2 die Konstruktion immer als Ganzes betrachtet wurde, und nie die aktuelle Konstruktionsreihenfolge betrachtet wurde. Dieselben Wege würden also auch bei einer die Konstruktion  $Z$  umfassenden größeren Konstruktion  $Z'$  erzeugt werden.  $\square$

In gewisser Weise ist unser Verfahren also „vorausschauend“. Die Entscheidungen werden so getroffen, dass auch *nachher* gemachte Konstruktionsschritte kein Springen verursachen können.

## 4.2.2 Theoreminvarianz

Eine weitere Eigenschaft des im Abschnitt 4.1 vorgestellten Verfahrens ist *Theoreminvarianz*: Eine einmal in einer Umgebung einer Startinstanz als wahr identifizierte algebraische Eigenschaft kann durch Bewegungen des DGS nicht wieder zerstört werden. Unter einer algebraischen Eigenschaft verstehen wir hierbei eine Eigenschaft, die sich als Nullstellenmenge eines homogenen Polynoms charakterisieren lässt. Typische algebraische Eigenschaften sind z.B. „drei Punkte sind kollinear“, „drei Punkte liegen auf einer Geraden“ oder „drei Geraden treffen sich oder sind parallel“.

**Theorem 4.5** *Es sei  $Z$  eine Konstruktion,  $o$  eine nicht-degenerierte Instanz von  $Z$ ,  $U_\varepsilon(o)$  eine Umgebung von  $o$  und  $E$  eine algebraische Eigenschaft, die auf  $U_\varepsilon(o) \cap \mathbf{I}_Z$  gilt. Das im letzten Abschnitt konstruierte formale DGS  $\mathcal{D}$  hat die Eigenschaft, dass  $E$  auf jeder in  $\mathcal{D}$  durch einen quasi-linearen Weg erreichbaren Instanz gilt.*

BEWEIS. Es sei  $F$  das Polynom, welches  $E$  repräsentiert, und  $\varphi$  ein quasi-linearer Weg der freien Elemente in  $Z$ . Das Polynom  $F$  ist insbesondere eine analytische Funktion und verschwindet auf einem Initialstück von  $\varphi$ . Also muss es die 0-Funktion sein.  $\square$

Es können natürlich auch mehrere quasi-lineare Wege theoreminvariant miteinander verkettet werden, sofern die Zwischenstationen (beim Wechsel von einem Weg auf den nächsten) keine degenerierten Instanzen sind.

Insbesondere bedeutet Theorem 4.5, dass wir bei einer Konstruktion wie dem Winkelhalbierenden-satz aus der Einleitung gewährleisten können, dass das Theorem „durch Ziehen nicht kaputt geht“, obwohl insgesamt drei Mehrdeutigkeitsentscheidungen unabhängig voneinander getroffen werden müssen. Mehr noch, Theoreme bleiben auch über Phasen, in denen Operationen nicht (reell) ausführbar sind, bestehen.<sup>16</sup>

Der wohl wichtigste Aspekt dieses Satzes ist, dass er erstmalig einen soliden Theorembegriff in die Welt dynamischer Geometrie einführt: *Ein Theorem ist eine algebraische Eigenschaft, die auf einer Umgebung einer Instanz wahr ist.* Das Verhalten eines auf Basis von Theorem 4.2 robust implementierten DGS sichert, dass Theoreme dieser Art auch unter Bewegungen konsistent erhalten bleiben. Insbesondere lassen sich basierend auf diese Begriffsbildung randomisierte Beweisverfahren angeben, die durch das Erzeugen von *vielen, genügend zufälligen* Instanzen ein Theorem bis zu einer vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit beweisen können (vgl. *Kortenkamp 1999, Kortenkamp/Richter-Gebert 2000a, Tulone/Yap/Li 2000*).

**Bemerkung:** Theorem 4.5 stellt gewissermaßen eine moderne Version des von *Poncelet (1822)* formulierten Kontinuitätsprinzips dar, welches mit dem Satz „Eine auf einer Umgebung als gültig erkannte Schnitteigenschaft einer geometrischen Figur muss als allgemeingültig anerkannt werden (selbst wenn einige der Konstruktionselemente in einigen Situationen nicht sichtbar sind)“ wiedergegeben werden kann. Zu Recht formulierte *Klein (1928)*, dass es sich bei dieser zu Poncelets Zeiten fast metaphysisch anmutenden Vorstellung um eine Tatsache handelt, die die direkte Folge des globalen Verhalten analytischer Funktionen ist: Verschwindet eine analytische Funktion auf einer dichten Menge, so verschwindet sie bereits überall.

<sup>16</sup>Ein schönes Beispiel für einen solchen Satz ist das Theorem, dass sich die paarweisen Radikalachsen dreier Kreise in einem Punkt treffen.

### 4.2.3 Diskretisierung vs. Kretisierung

Die Umsetzung der theoretischen Resultate über kontinuierliche formale DGS in eine konkrete Implementierung ist nicht trivial. Das Projekt *Cinderella* (Richter-Gebert/Kortenkamp 1999) stellt einen Versuch dar, so weit wie möglich an die theoretische Idealisierung heran zu kommen. Erfreulicherweise gibt es aber auch Effekte, die die Situation gegenüber der in Theorem 4.2 vereinfachen.

Der dort beschriebene Grenzübergang muss in der Praxis nie durchgeführt werden. Bewegt man mit der Maus in einer Konstruktion ein freies Element, erhält der Computer keine stetige Funktion einer Bewegung als Eingabe, sondern eine diskrete Folge von Stützstellen. Der Übergang von dieser diskreten Folge von Stützstellen zu einer kontinuierlichen Funktion, eine *Kretisierung*,<sup>17</sup> muss im Programm selbst gemacht werden. Hierbei genügt es, *irgendeine* Funktion anzugeben, die die Stützstellen in der angegebenen Reihenfolge durchläuft. Diese kann von vorneherein so angelegt sein, dass sie die Verzweigungspunkte der Funktion höchstwahrscheinlich nicht trifft. Da kleine Verformungen – die keine neuen Verzweigungspunkte einfangen – des Weges das Endresultat nicht beeinflussen, besteht hier eine beträchtliche Freiheit, die sich in der Implementierung ausnutzen lässt. *Cinderella* erzeugt für je zwei aufeinanderfolgende Stützstellen einen quasi-linearen Weg, bei dem der Kontrollparameter durchs Komplexe geführt wird.

### 4.2.4 Auflösen des Polynomgleichungssystems

Im Beweis von Theorem 4.2 gingen wir von dem sehr allgemeinen Modell algebraischer Grundoperationen aus. Dies führte uns zu der Beschreibung einer Konstruktion als polynomiales Gleichungssystem. Die Parameter der abhängigen Objekte konnten durch Lösen dieses Gleichungssystems gefunden werden.

Das Berechnen der abhängigen Elemente kann aber zumeist viel einfacher geschehen, da die meisten gebräuchlichen mehrdeutigen Operationen (z.B. Schnitt Gerade/Kreis, Winkelhalbierende, etc.) durch die vier Grundrechenarten und Quadratwurzeln direkt berechnet werden können. Einige weniger gebräuchliche Operationen, wie der Schnitt zweier Kegelschnitte, benötigen darüber hinaus Kubikwurzeln. Komplexere Nullstellengebilde treten im Allgemeinen bei derzeit marktüblichen DGS nicht auf. Die im Beweis von Theorem 4.2 behandelten Verzweigungspunkte treten dann immer an den Stellen auf, bei denen die Radikalausdrücke Nullstellen haben.

Erweitern wir allerdings den Objektumfang eines DGS von linearen und quadratischen Objekten und lassen auch Kurven dritten oder höheren Grades zu, so führt bereits der Schnitt einer solchen Kurve mit einem Kegelschnitt auf eine Polynomgleichung sechsten Grades, die nicht mehr explizit gelöst werden kann.

### 4.2.5 Algorithmische Komplexität

Es sei an dieser Stelle nur kurz erwähnt, dass die Fragestellung nach der Algorithmik der Wegverfolgung keineswegs trivial ist. Sie führt direkt ins Herz eingehender Untersuchungen aus der

---

<sup>17</sup>das Gegenteil von Dis-kretisierung

reellen Komplexitätstheorie (vgl. *Blum/Shub/Cucker/Smale 1998*). Bei den dort behandelten Pfadverfolgungsverfahren zum Lösen polynomialer Gleichungssysteme, so genannten *Homotopiemethoden*, stößt man auf Probleme der gleichen Art wie bei der Pfadverfolgung in DGS. So ist es im allgemeinen z.B. algorithmisch „genauso teuer“ zu versuchen, einen Verzweigungspunkt vorherzusagen, wie ihn korrekt zu durchwandern. Insbesondere kann man für geometrische Konstruktionen zeigen, dass allein die Beantwortung der Frage nach der korrekten Verfolgung eines gegebenen Pfades NP-schwer ist. Für eine ausführliche Darlegung dieser Aspekte verweisen wir auf *Richter-Gebert/Kortenkamp (2000)*.

## 5 Grenzen der Stetigkeit

Nachdem wir im letzten Kapitel gesehen haben, dass man ein kontinuierliches DGS konstruieren kann, sofern in einer Konstruktion ausschließlich algebraische Grundoperationen enthalten sind, zeigen wir nun, dass schon eine kleine Erweiterung der zulässigen Grundkonstruktionen zu diskontinuierlichem Verhalten führen kann.

**Definition 5.1** *Es sei  $(Z, o)$  ein Konstruktion/Startinstanz-Paar. Eine  $(Z, o)$  umfassendes Konstruktion/Startinstanz-Paar  $(Z', o')$ , dass nur durch Hinzufügen von Operationen vom Typ Freier Punkt, Verbindungsgerade, Schnitt Gerade/Gerade und Parallele erzeugt wurde, heißt eine schlichte Erweiterung.*

**Definition 5.2** *Ein kontinuierliches formales DGS  $\mathcal{D}$  für  $(Z, o)$  heiße erweiterbar stetig, wenn sich für jede schlichte Erweiterung  $(Z', o')$ , das Verhalten von  $\mathcal{D}$  zu einem kontinuierlichen DGS  $\mathcal{D}'$  für  $(Z', o')$  ergänzen lässt.*

Erweiterbare Stetigkeit ist eine stark abgeschwächte Form von globaler Konsistenz, in der die für die Ergänzung erlaubten Grundoperationen keine neuen Mehrdeutigkeiten in die betrachtete Konstruktion einführen. Insbesondere ist das Verhalten von  $\mathcal{D}'$  durch das Verhalten von  $\mathcal{D}$  bereits eindeutig festgelegt. Die Inkompatibilität zur Stetigkeit liegt somit nicht im Verfolgen der hinzu konstruierten Elemente, sondern im ursprünglichen DGS selbst.

### 5.1 Von-Staudt-Konstruktionen

Wir wollen nun untersuchen, welche Möglichkeiten wir im Rahmen von *schlichten Erweiterungen* haben. Diese geben uns ein überraschend starkes Mittel um eine gegebene Konstruktion zu ergänzen und dies eventuell zu Widersprüchen zur Kontinuität zu führen. Insbesondere können wir mit Hilfe dieser Operationen auf geometrische Weise Addition und Multiplikation nachbilden.

Denken wir uns hierzu die Menge  $\mathbf{P}$  durch  $\mathbb{R}^2$  (nicht-homogen) koordinatisiert. Die Punkte  $p_0, p_1, p_x, p_y \in \mathbf{P}$  mit Koordinaten  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(x, 0)$  und  $(y, 0)$  seien gegeben. Die in Bild 2 angegebenen Konstruktionen (die klassischen *von-Staudt-Konstruktionen*, welche man benutzt, um ohne Koordinatisierung eine algebraische Struktur in den Projektiven Raum zu bringen) ermöglichen es, aus diesen Eingabepunkten neue Punkte mit Koordinaten  $(x+y, 0)$  bzw.  $(x \cdot y, 0)$  zu konstruieren. Ebenso ist zu gegebenen  $x$  auch die Konstruktion von  $-x$  einfach durchführbar. Bei der Multiplikationskonstruktion kann man die Konstruktionsreihenfolge auch umkehren, indem man mit den Punkten

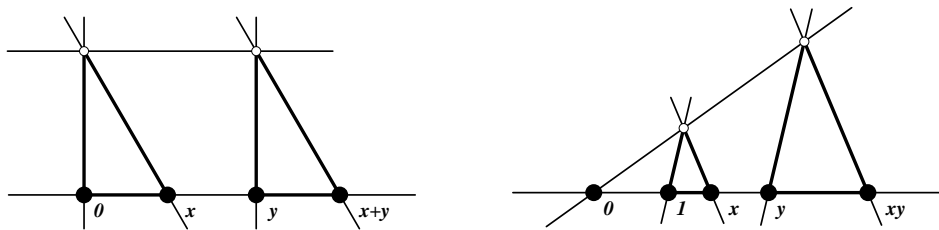


Abbildung 2: Von-Staudt-Konstruktionen für Addition und Multiplikation.

$p_0, p_1, p_x, p_{x \cdot y}$  startet und daraus den Punkt  $p_y$  konstruiert. Das algebraische Äquivalent hierzu ist die Division  $y = z/x$  mit  $z = x \cdot y$ . Im Grenzfall  $x \rightarrow 0$  wandert hierbei der Punkt  $p_y$  gegen Unendlich.

Durch Verkettung mehrerer von-Staudt-Konstruktionen kann jedes Polynom  $f(x)$  „geometrisch berechnet“ werden. Legen wir die Punkte  $p_0$  und  $p_1$  auf der  $x$ -Achse fest, können wir also einen Punkt  $p_{f(x)}$  konstruieren, welcher für die „Eingabe“  $p_x = (x, 0)$  den „Funktionswert“  $(f(x), 0)$  hat.

Als weitere einfache, aber wichtige, Grundkonstruktionen nennen wir noch die Extraktion von Koordinaten eines Punktes durch Parallelprojektion auf die  $x$ - bzw.  $y$ -Achse eines vorher festgesetzten Koordinatensystems. Ebenso einfach kann ein Punkt  $(x, 0)$  auf einen Punkt mit Koordinaten durch Projektion senkrecht zu einer Diagonale des Koordinatensystems abgebildet werden. Zwei Punkte  $(x, 0)$  und  $(y, 0)$  können zudem zu einem Punkt  $(x, y)$  zusammengesetzt werden.

## 5.2 Nicht-algebraische Übergänge

Das nun folgende Theorem gibt ein Kriterium an, welches die Existenz eines erweiterbar stetigen DGS verhindert. Wir gehen davon aus, dass wir die Menge  $\mathbf{P}$  mit einem nicht-homogenen Koordinatensystem versehen haben, und  $x(p)$  bezeichnet die  $x$ -Koordinate eines Punktes  $p$ .

**Theorem 5.3** *Es sei  $\mathcal{D}$  ein formales kontinuierliches DGS für  $(Z, o)$ . Ferner sei  $(Z', o')$  eine schlichte Erweiterung von  $(Z, o)$  mit dazugehörigem durch  $\mathcal{D}$  induziertem formalem DGS  $\mathcal{D}'$ . Es seien  $f(Z', o')$  die freien Elemente der Erweiterung  $Z'$  und  $\varphi \in \Phi_{f(Z', o')}$  ein quasi linearer Weg. Der Weg  $p(t) : I' \rightarrow \mathbf{P}$  sei der durch  $\mathcal{D}'$  und  $\varphi$  induzierte Weg eines abhängigen Punktes vom  $Z'$ . Gibt es nun ein  $t' \in [0, 1]$  und ein  $\varepsilon > 0$  mit den folgenden Eigenschaften:*

- (i)  $x(p(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (t - t')^i$  für  $t \in [t' - \varepsilon, t']$ ,
- (ii)  $x(p(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (t - t')^i$  für  $t \in [t', t' + \varepsilon]$ ,
- (iii)  $(a_0, a_2, \dots) \neq (b_0, b_2, \dots)$ ,

dann ist  $\mathcal{D}$  nicht erweiterbar stetig.

**BEWEIS.** Wir müssen zeigen, dass wir eine schlichte Erweiterung von  $(Z', o')$  finden, die nicht stetig ist. Es sei  $i$  der kleinste Index mit  $a_i \neq b_i$ . Mittels von-Staudt-Konstruktionen berechnen wir das Polynom  $w(t) = \sum_{i=0}^{i-1} a_i (t - t')^i$ . Wir extrahieren die  $x$ -Koordinate des Punktes  $p$  und konstruieren  $w'(t) := (x(p(t)) - w(t))(t - t')^i$ . Der rechtsseitige Grenzwert von  $w'(t)$  an der Stelle  $t$  ist  $a_i$ , der linksseitige Grenzwert ist  $b_i \neq a_i$ , also verhält sich der  $w'(t)$  entsprechende Punkt unstetig.  $\square$

Dieses Theorem mag unscheinbar erscheinen, es schränkt die möglichen Grundoperationen eines erweiterbar stetigen DGS aber stark ein. Weil  $|x|/x$  an der Stelle 0 eine Sprungstelle hat, darf zum Beispiel die Betragsfunktion  $|x|$  nicht aus Grundkonstruktionen zusammensetzbar sein. Dies verbietet es insbesondere, gemessene Entfernungen von Punkten zum Abtragen von Strecken zu verwenden, wenn diese Messungen den Absolutbetrag liefern. Erlaubt wäre es aber, das Quadrat der Abstandsfunktion zu messen und abzutragen, denn diese Funktion ist algebraisch. Oder man lässt die Mehrdeutigkeit der Abstandsfunktion zu, und nimmt die Quadratwurzel des Quadrates des gemessenen Abstandes, so der Abstand zweier Punkte sowohl  $d$  als auch  $-d$  ist. Durch geeignete Wahl des passenden Zweiges lässt sich der Abstand dann nämlich immer analytisch fortsetzen. Selbst hochgradig glatte Funktionen können in einfachen Erweiterungen zu sprunghaftem Verhalten führen, wenn sie nicht überall unendlich oft differenzierbar sind. So kann man in einem erweiterbar stetigen DGS keine Funktion konstruieren, die sich für negative  $x$  wie  $x^{1000}$  und für positive  $x$  wie  $x^{1001}$  verhält, obwohl diese 1000 mal stetig differenzierbar ist.

### 5.3 Transzendente Funktionen

Eine weitere prinzipielle Hürde stellen Operationen dar, die zwar analytisch sind, aber nicht-isolierte Singularitäten aufweisen. Typischerweise entstehen diese, wenn man das Abtragen von Winkeln auf Längen oder umgekehrt zulässt. Dadurch lassen sich transzendente Funktionen wie etwa  $\sin(x)$  konstruieren. Die Funktion  $\sin(x)$  ist zwar fast überall analytisch, weist aber im Unendlichen eine nicht-isolierte Singularität auf, d.h. eine Singularität, die in jeder Umgebung unendlich viele Singularitäten hat. Unser Verfahren, den gewünschten Weg durch eine Singularität durch stetige Verformung zu approximieren, schlägt hier fehl, da die Homotopieklasse des Weges bei der Annäherung unendlich oft wechselt. Dennoch kann man mit den hier vorgestellten Verfahren über weite Strecken noch gut mit derartigen Funktionen umgehen, solange man keinen Weg durch eine nicht-isolierte Singularität verfolgen muss.

## Literatur

- L. BLUM, F. CUCKER, M. SHUB & S. SMALE (1998): *Complexity and Real Computation*, Springer, New York.
- E. BRIESKORN & H. KNÖRRER (1981): *Ebene algebraische Kurven*, Birkhäuser Basel, Boston, Stuttgart.
- F. KLEIN (1928): *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Springer, Heidelberg.
- U. KORTENKAMP (1999): *Foundations of Dynamic Geometry*, Dissertation, ETH Zürich, <http://www.cinderella.de/papers/diss.pdf>.
- U. KORTENKAMP & J. RICHTER-GEBERT (2000a): *Decision complexity in Dynamic Geometry*, in: Proceedings of the ADG 2000, Springer Lecture Notes in Artificial Intelligence **2061**, to appear, <http://www.cinderella.de/papers/decisionComplexity.pdf>.
- U. KORTENKAMP & J. RICHTER-GEBERT (2000b): *Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie in Cinderella*, Journal für Mathematikdidaktik **21**, 303–324, B.G. Teubner.
- J.-V. PONCELET (1822): *Traité des propriétés projectives des figures*, Gauthier-Villars.
- J. RICHTER-GEBERT & U. KORTENKAMP (1999): *The Interactive Geometry Software Cinderella*, Springer-Verlag Heidelberg, <http://www.cinderella.de>.
- J. RICHTER-GEBERT & U. KORTENKAMP (2000): *Complexity issues in Dynamic Geometry*, in: Proceedings of the Smalefest 2000 in honour of Steven Smales 70th birthday, <http://www.cinderella.de/papers/complexity.pdf>.
- D. TULONE, C. YAP, C. LI (2000): *Randomized Zero Testing of Radical Expressions and Elementary Geometry Theorem Proving*, in: Proceedings of the ADG 2000, Springer Lecture Notes in Artificial Intelligence **2061**, to appear.