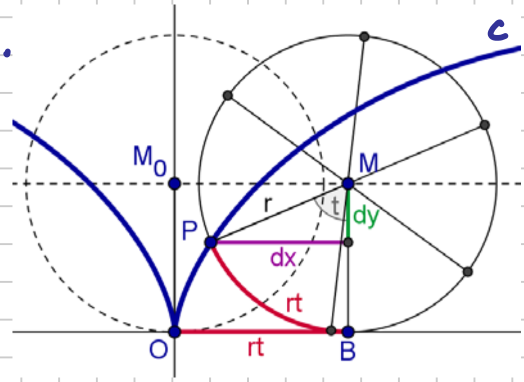
Geometrie LB   Blatt 9   Übungen

Notiztitel   24.11.2014

I22.



Rollbedingung mit Drehwinkel t

$r=1$ (*)

$\overline{OB} = \widehat{BP} = r\cdot t = t$; $P(x,y)$?

$\cos t = \frac{dy}{r} = \frac{r-y}{r} \overset{(*)}{=} 1-y$

$\sin t = \frac{dx}{r} = \frac{rt-x}{r} \overset{(*)}{=} t-x$

a) Parameterdarstellung von c mit (Kurven-)Parameter t

$c: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-\sin t \\ 1-\cos t \end{pmatrix}$, $t \in [0,2\pi[$ ein Umlauf oder $t \in \mathbb{R}$ mehrere Umläufe

b) Richtung der Kurventangente:

$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ sofern $\neq \vec{0}$ (reguläre Stellen)

1. Weg $\vec{x}(t_0)$ singulär $\Leftrightarrow \dot{\vec{x}}(t_0) = \vec{0}$ (2 Gleichungen)

$\begin{pmatrix} 1-\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2. Zeile: $\sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

in 1. Zeile eingesetzt: $1-\cos k\pi = \begin{cases} 0 & \text{für } k=2n \\ 2 & \text{für } k=2n+1 \end{cases},\ n \in \mathbb{Z}$

2. Weg: $\vec{x}(t_0)$ singulär $\Leftrightarrow (\dot{\vec{x}}(t_0))^2 = 0$ (1 Gleichung)

$(\dot{\vec{x}}(t))^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1 - 2\cos t + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1} = 2(1-\cos t) \Rightarrow$

$(\dot{\vec{x}}(t_0))^2 = 0 \Leftrightarrow 2(1-\cos t_0) = 0 \Leftrightarrow \cos t_0 = 1 \Leftrightarrow t_0 = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

Beachte: Die singulären Stellen $t = 2\pi n$ sind geometrisch begründet und rühren nicht von einer ungeschickten Wahl der Parametrisierung her (vgl. x-Achse: $\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ und $\begin{pmatrix} u^3 \\ 0 \end{pmatrix}, u \in \mathbb{R}$)

Zusatz: Tangentenrichtung in singulären Punkten (Spitzen)

Betrachte ebene Kurve c als Graph einer Funktion $y = y(x)$

$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$; $\lim\limits_{t\to 0\pm} y' \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim \frac{\cos t}{\sin t} = \pm\infty \Rightarrow$ vert. Tgten

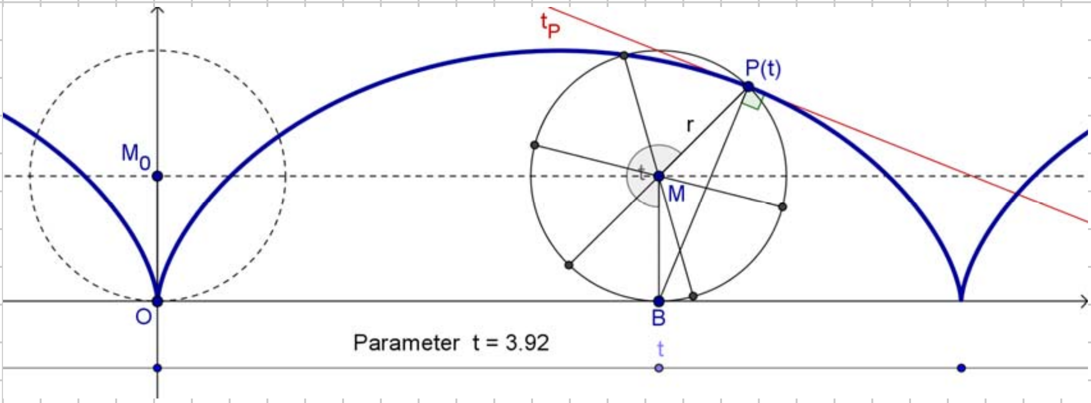
c) Bogenlänge: $s = \int_0^{2\pi} |\dot{\vec{x}}(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{\vec{x}}(t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\,dt =$

vgl. 2. Weg   trig. Umformung

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2\cdot 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt = 2\cdot \int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| dt = -4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4\cos\pi + 4\cos 0 = \underline{\underline{8}}$

F.S. $\boxed{1-\cos x = 2\cdot \sin^2\frac{x}{2}}$ $\sqrt{x^2} = |x|$

Für $t \in [0, 2\pi]$ gilt: $\sin\frac{t}{2} \geq 0 \Rightarrow \left|\sin\frac{t}{2}\right| = \sin\frac{t}{2}$
sonst ggfs. Integral aufspalten



Bemerkung: Die Zykloide hat folgende Eigenschaften:

① Die Kurventangente steht auf der Geraden PB senkrecht!

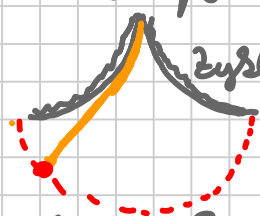
Beweis: $\vec{PB} = \vec{OB} - \vec{OP} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{PB} \cdot \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \sin t(1-\cos t) + (\cos t - 1)\sin t = 0$ ✓

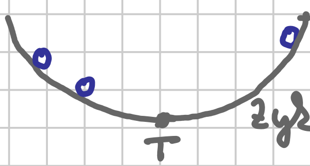
Skalarprod.   siehe DGS-Figur!

Kinematische Deutung: Drehung um Momentanpol B!

② Lässt man ein Pendel der Länge l zwischen zwei Zykloiden-Bogen der Länge $2l$ pendeln (vgl. Skizze), so ist die Schwingungsdauer unabhängig von der Amplitude

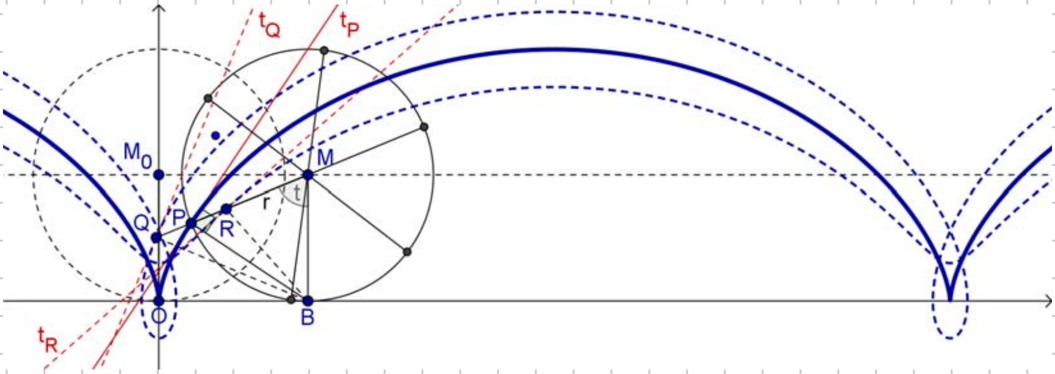


③ Die Zykloide ist eine Tautochrone (Kurve der gleichen Fallzeit), d.h. lässt man Murmeln an verschiedenen Punkten nebenstehender Zykloide ohne Geschwindigkeit los, so sind sie in der gleichen Zeit im Punkt T.



④ Die Evolute der Zykloide ist eine dazu kongruente Zykloide

⑤ Betrachte auch verl./verk. Zykloiden $\vec{x}(t) = r\cdot\begin{pmatrix} t-\lambda\sin t\\ 1-\lambda\cos t\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}$
mit $r,\lambda>0$



$$\dot{\vec x}(t) = r\cdot\begin{pmatrix}1-\lambda\cos t\\ \lambda\sin t\end{pmatrix} \Rightarrow \left(\dot{\vec x}(t)\right)^2 = r^2(1-2\lambda\cos t+\lambda^2) \overset{!}{=} 0$$

$\Leftrightarrow \cos t = \frac{1+\lambda^2}{2\lambda}$. Aber $\frac{1+\lambda^2}{2\lambda} > 1$ für $\lambda\neq 1$ da:

$(1+\lambda^2>2\lambda \Leftrightarrow 1-2\lambda+\lambda^2>0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2>0$ qed.)

$\Rightarrow$ keine singulären Stellen für $\lambda\neq 1$, $\lambda\geq 0$.

T23. c: $\vec x(u) = \begin{pmatrix}\frac{1-u^2}{1+u^2}\\ \frac{u-u^3}{1+u^2}\end{pmatrix}, u\in\mathbb{R}$, $c\in C^\infty$ klar

a) $\vec x(u)$ singulär $\Leftrightarrow \dot{\vec x}(u)=\vec 0 \Leftrightarrow (\dot{\vec x}(u))^2=0$ (Quotientenregel)

$$\dot{\vec x}(u) = \frac{1}{(1+u^2)^2}\begin{pmatrix}-2u(1+u^2)-(1-u^2)\cdot 2u\\ (1-3u^2)(1+u^2)-(u-u^3)\cdot 2u\end{pmatrix} = \frac{1}{(1+u^2)^2}\begin{pmatrix}-4u\\ 1-4u^2-u^4\end{pmatrix}$$

Ansatz $\dot{\vec x}(u)=\vec 0 \Rightarrow$ 1. Komp. $u=0$ in 2. Komp. $\frac{1-4u^2-u^4}{(1+u^2)^2} = 1\neq 0$ ↯

$\Rightarrow$ c ist regulär (Bem.: 2. Weg über $(\dot{\vec x}(u))^2=0$ hier aufwändiger)

Doppelpunkte?

$\vec x(u)=\vec x(v) \Rightarrow$ 1. Komp. $\frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{1-v^2}{1+v^2} \Leftrightarrow$ kreuzweise multiplizieren

$\Leftrightarrow \cancel{1}-u^2+v^2-\cancel{u^2v^2} = \cancel{1}+u^2-v^2-\cancel{u^2v^2} \Leftrightarrow 2v^2=2u^2$

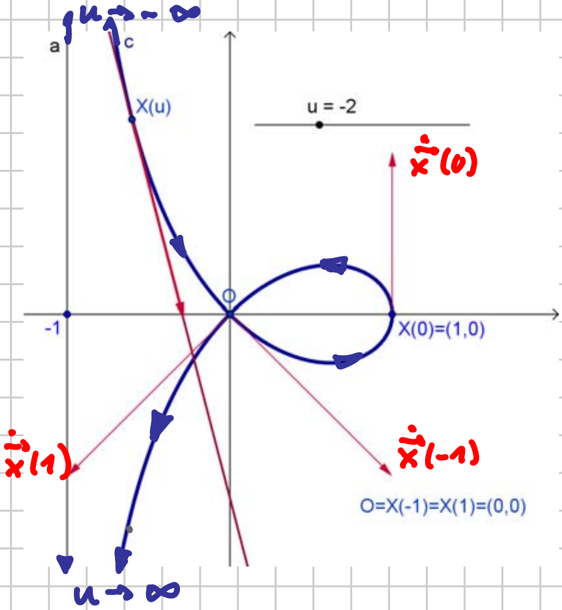
$\Rightarrow v=\pm u$

Setze $v=-u$ in 2. Komp. $\frac{u-u^3}{1+u^2} = \frac{v-v^3}{1+v^2}$ ein $\Rightarrow u-u^3=-u+u^3$

$$\Leftrightarrow 2(u-u^3)=0 \Leftrightarrow u(1-u^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} u=0 \Rightarrow u=v=0 \\ u=\pm 1 \Rightarrow v=\mp 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ c besitzt einen Doppelpunkt $\vec{x}(-1)=\vec{x}(1)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

b)



Betrachte $\vec{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\dot{\vec{x}}(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\dot{\vec{x}}(-1)=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$; $\dot{\vec{x}}(1)=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

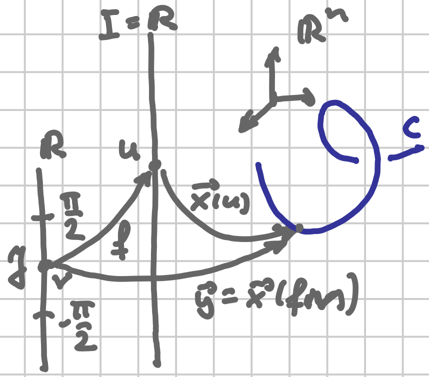
Beachte Asymptote $x=-1$ wegen

$$\lim_{u\to\pm\infty}\vec{x}(u)=\lim_{u\to\pm\infty}\frac{1-u^2}{1+u^2}\begin{pmatrix}1\\u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\\mp\infty\end{pmatrix}$$

Beachte: Symmetrie zur x-Achse,

wegen $\vec{x}(-u)=\begin{pmatrix}x(-u)\\y(-u)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(u)\\-y(u)\end{pmatrix}$

c) $u=f(v):=\tan v$ ist zulässige P.T. $\Leftrightarrow$



(i) $f\in C^\infty$, beliebig oft diffbar, klar

d.h. Differentiationsordnung von $\vec{y}(v):=\vec{x}(f(v))$ gleich der von $\vec{x}(u)$

(ii) f surjektiv: zu jedem $u\in I=\mathbb{R}$ gibt es ein $v\in J=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\subset\mathbb{R}$ mit $f(v)=u=\tan v$, klar

d.h. $\vec{y}(v):=\vec{x}(f(v))$ liefert alle Punkte der Kurve $c: \vec{x}(u)$

(iii) $\dot{f}(v)=\frac{df}{dv}=\frac{1}{\cos^2 v}\neq 0$ hier >0, d.h. Regularität bleibt erhalten, da $\dot{\vec{y}}(v)=\frac{d\vec{y}}{dv}=\frac{d\vec{x}(f(v))}{du}\cdot\frac{df}{dv}=\underbrace{\dot{\vec{x}}(f(v))}_{\neq\vec{0}}\cdot\underbrace{\dot{f}(v)}_{\neq 0}$

wenn $\neq\vec{0}$ und $\neq 0$ $\Rightarrow \dot{\vec{y}}(v)\neq\vec{0}$

Neue Parameterdarstellung

$$\vec{y}(v)=\vec{x}(f(v))=\vec{x}(\tan v)=\frac{1-\tan^2 v}{1+\tan^2 v}\begin{pmatrix}1\\\tan v\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1-\frac{\sin^2 v}{\cos^2 v}}{1+\frac{\sin^2 v}{\cos^2 v}}\cdot\begin{pmatrix}1\\\tan v\end{pmatrix}=\underbrace{(\cos^2 v-\sin^2 v)}_{=\cos 2v}\cdot\begin{pmatrix}1\\\tan v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2v\\\tan v\cos 2v\end{pmatrix}$$

FS.