

affine Koord.

homogene Koord.

H18 a) $h: xy = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}) \Rightarrow h: \frac{x_1}{x_0} \cdot \frac{x_2}{x_0} = \frac{1}{2} \mid \cdot 2x_0^2$

$\Rightarrow h: x_0^2 - 2x_1x_2 = 0$ bzw. $\vec{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = 0$

(Kegelschnittsgleichung in P^2)

= A mit $A^T = A$

b) Ferngerade $x_0 = 0 \cap h \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \wedge x_1 \neq 0 \\ \text{oder} \\ x_1 = 0 \wedge x_2 \neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{h}_1 = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{h}_2 = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} H_1(0, 1, 0) \\ H_2(0, 0, 1) \end{cases}$
 bis auf $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $(x_0, x_1, x_2) \neq (0, 0, 0)$

Dies sind die Fernpunkte der x- bzw y-Achse der eukl. Ebene

c) Nach Vorlesung gilt im Fall $\det(A) \neq 0$ (hier $\det A = -1$) für die

Tgte g_1 in $H_1(\vec{h}_1)$: $\vec{h}_1^T A \vec{x} = 0 \Leftrightarrow (0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$
 $\Leftrightarrow (0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} x_0 \\ -x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x_2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 0}}$

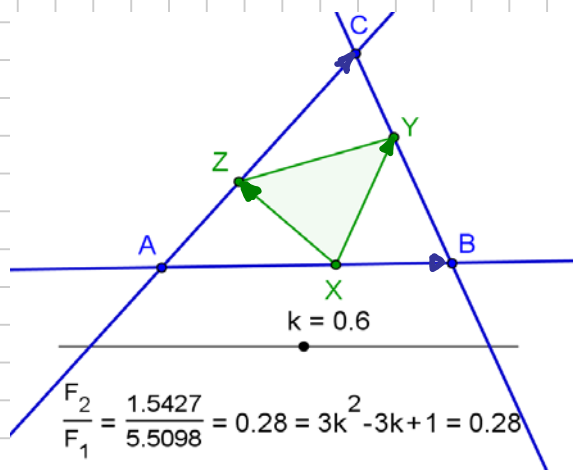
Tgte g_2 in $H_2(\vec{h}_2)$: $\vec{h}_2^T A \vec{x} = 0 \Leftrightarrow (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$
 $\Leftrightarrow (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} x_0 \\ -x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x_1 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}$

Übergang zu eukl. Koordinaten $x = \frac{x_1}{x_0}$ und $y = \frac{x_2}{x_0}$ (o.E. $x_0 = 1$)

liefert $g_1: y = 0$ (x-Achse) und $g_2: x = 0$ (y-Achse)

Bemerkung: Allgemein gilt: Die Asymptoten einer Hyperbel sind die Tangenten der Hyperbel in den Fernpunkten der Hyperbel. Dieser Satz lässt sich unter Nutzung homogener Koordinaten ganz ohne Grenzbetrachtungen begründen, bei denen Koordinaten gegen ∞ gehen.

H19.



Betrachtung in \mathbb{R}^3 , um Flächeninhalte einfach zu erhalten

$$F_1 = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| \quad (1)$$

$$F_2 = \frac{1}{2} |\vec{XY} \times \vec{XZ}| \quad (2)$$

$\vec{AX} = k \cdot \vec{AB} \Rightarrow X$ auf Gerade AB
analog Y auf BC , Z auf CA .

Zum Vergleich von F_1 und F_2 möglichst \vec{XY} und \vec{XZ} durch \vec{AB} und \vec{AC} ausdrücken.

$$\vec{XY} = \vec{XA} + \vec{AB} + \vec{BY} = -k \cdot \vec{AB} + \vec{AB} + k \cdot \vec{BC} =$$

$$= (1-k) \vec{AB} + k \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = (1-2k) \vec{AB} + k \vec{AC} \quad \left. \vphantom{\vec{XY}} \right\} \Rightarrow$$

$$\vec{XZ} = \vec{XA} + \vec{AC} + \vec{CZ} = -k \cdot \vec{AB} + (1-k) \vec{AC}$$

$$\vec{XY} \times \vec{XZ} = [(1-2k) \vec{AB} + k \vec{AC}] \times [-k \vec{AB} + (1-k) \vec{AC}] =$$

$$= -(1-2k)k \underbrace{\vec{AB} \times \vec{AB}}_{=0} + (1-2k)(1-k) \vec{AB} \times \vec{AC} +$$

$$-k^2 \underbrace{\vec{AC} \times \vec{AB}}_{=-\vec{AB} \times \vec{AC}} + k(1-k) \underbrace{\vec{AC} \times \vec{AC}}_{=0} =$$

$$= [1-3k+2k^2+k^2] \cdot \vec{AB} \times \vec{AC} \quad (3) \Rightarrow$$

$$F_2 = \frac{1}{2} |\vec{XY} \times \vec{XZ}| = |3k^2 - 3k + 1| \cdot \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = |3k^2 - 3k + 1| \cdot F_1 \quad (4)$$

Wegen $3k^2 - 3k + 1 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-12}}{6} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

ist $3k^2 - 3k + 1 > 0 \quad \forall k \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{F_2}{F_1} = 3k^2 - 3k + 1}}$

$\frac{F_2}{F_1}$ ist minimal für $k = \frac{1}{2}$ d.h. für das Seitenmittendreieck

H20. $U = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow U^T U = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{E}$

$\det U = \frac{1}{27} \cdot (8 + 8 - 1 + 4 + 4 + 4) = \underline{\underline{1}} \Rightarrow \underline{\underline{U \text{ ist Drehmatrix}}}$

Drehachse \vec{v} : gesucht $\vec{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $U \vec{x} = \vec{x}$

$$\begin{aligned} 2x + 2y + z &= 3x & -x + 2y + z &= 0 & (1) \\ \Leftrightarrow x - 2y + 2z &= 3y & \Leftrightarrow x - 5y + 2z &= 0 & (2) \\ 2x - y - 2z &= 3z & 2x - y - 5z &= 0 & (3) \end{aligned}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow -3y + 3z = 0 \Rightarrow y = z = (1) \Rightarrow x = 3y = 3z$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} \text{ ist Richtung der Drehachse}$$

U besitzt sicher einen EV zum EW $\lambda = 1$
 $\Rightarrow (3)$ ist LK von $(1) \wedge (2)$

(o.E $z=1$)

Damit ist \vec{r} normiert und durch die Wahl von \vec{r} orientiert

Drehwinkel δ ?

1. Weg: Wähle $\vec{s} \perp \vec{r}$ z.B. $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ o.E auf 1 normiert

$$\Rightarrow \vec{s}' = U \vec{s} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |\vec{s}'| = 1$$

$$\cos \delta = \frac{\vec{s} \cdot \vec{s}'}{|\vec{s}| |\vec{s}'|} = \vec{s}^T \vec{s}' = \frac{1}{6} \cdot (0 \ 1 \ -1) \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-5}{6} \text{ bis auf Orientierung}$$

2. Weg: $\cos \delta = \frac{\text{spur } U - 1}{2} = \frac{\frac{1}{3}(2-2-2) - 1}{2} = \frac{-5}{6}$

Vorzeichen von δ ? $-\pi < \delta < \pi$

Ist $\{\vec{s}, \vec{s}', \vec{r}\}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem $\Rightarrow \delta > 0$

$$\det(\vec{s}, \vec{s}', \vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Faktoren ausklammern!}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{11}} \cdot (-1+3-12-1) = \frac{-11}{6\sqrt{11}} < 0 \Rightarrow \delta = -\arccos\left(-\frac{5}{6}\right) \in [0, \pi]$$

Ersetzt man \vec{r} durch $-\vec{r}$, d.h. orientiert man die Drehachse um, so wird auch δ unorientiert, d.h. $\delta \rightarrow -\delta$

