

T26. $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + t \sin t \\ \sin t - t \cos t \end{pmatrix}, t > 0 \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} t \cos t \\ t \sin t \end{pmatrix}, \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \cos t - t \sin t \\ \sin t + t \cos t \end{pmatrix}$

$\Rightarrow |\dot{\vec{x}}(t)| = t = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \vec{t}(t) = \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \vec{n}(t)$

Frenet 2 Bein $\vec{t} \perp \vec{n}$ mit $\det(\vec{t}, \vec{n}) = 1$
rechts ONB

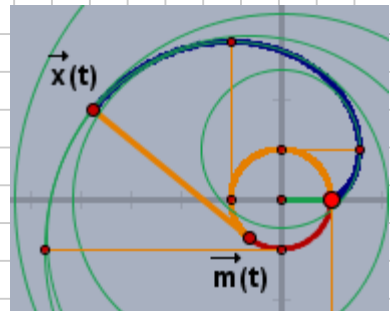
$\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}) = \det \begin{pmatrix} t \cos t & \cos t - t \sin t \\ t \sin t & \sin t + t \cos t \end{pmatrix} = t^2 \cdot \det \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = t^2$
t-faches abziehen *t-t ausklammern = 1*

$\Rightarrow \kappa(t) = \frac{\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}})}{|\dot{\vec{x}}|^3} = \frac{t^2}{t^3} = \frac{1}{t} \Rightarrow$ *Krümmungsradiusmittelpunkt*

$\vec{m}(t) = \vec{x}(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \cdot \vec{n}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + t \sin t \\ \sin t - t \cos t \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, t > 0$

Evolvente von c ist ein Kreis k um O mit Radius 1.

Umgekehrt ist c eine Kreis-evolvente ($t =$ *Bogenlänge von k*)



$\vec{x}(t) = \vec{m}(t) + (t_0 - t) \cdot \vec{m}'(t)$

$= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + (t_0 - t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + t \sin t \\ \sin t - t \cos t \end{pmatrix}, t > 0 \checkmark$
o.E. $t_0 = 0$

Alternative Berechnung der Krümmung $\kappa(t)$ mit Hilfe der Frenet-Ableitungsgleichungen $\vec{t}'(s) = \kappa(s) \cdot \vec{n}(s)$ mit Bogenlänge s ?
 $\vec{n}'(s) = -\kappa(s) \cdot \vec{t}(s)$

Betrachte $\vec{y}(s) = \vec{x}(t(s)) \Rightarrow \vec{y}'(s) = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \vec{t}(t(s))$
 $\Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\dot{\vec{x}}(t)|} = \frac{1}{t}$ und $|\vec{y}'(s)| = 1 \forall s$

$\vec{t}'(s) = \frac{d\vec{t}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \frac{dt}{ds} = \kappa(t(s)) \cdot \vec{n}(t(s)) \Rightarrow \kappa(t) = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{t}$
 $= \vec{n}(t(s))$

T27. $\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ \sqrt{2} u \end{pmatrix}, (u,v) \in \mathbb{R}^2$

a) u-Linien ($v=v_0 = \text{const}$) $\vec{x}(u,v_0) = u \cdot \begin{pmatrix} \cos v_0 \\ \sin v_0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

Geraden durch Ursprung O mit Richtung \vec{r}

v-Linien ($u=u_0 = \text{const}$) $\vec{x}(u_0,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} u_0 \end{pmatrix} + u_0 \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix}$

Kreis um z-Achse mit Radius u_0 in Ebene $z = \sqrt{2} u_0$

$\Rightarrow \phi$ ist Drehfläche um z-Achse mit geradlinigem Meridian. (u-Linien)

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ \sqrt{2} u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ \sqrt{2} u \end{pmatrix}$$

Drehmatrix um z-Achse mit Winkel v

Kurve in xz -Ebene = Meridian hier: Gerade
Kurvenparameter u

$\Rightarrow \phi$ ist ein Drehkegel um z-Achse, Spitze O .

b) ϕ regulär $\Leftrightarrow \vec{x}_u, \vec{x}_v$ linear unabhängig $\forall (u,v)$

$\Leftrightarrow \vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq \vec{0} \quad \forall (u,v) \Leftrightarrow (\vec{x}_u \times \vec{x}_v)^2 \neq 0 \quad \forall (u,v)$

$\vec{x}_u = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \vec{x}_v = \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Für $u \neq 0$ gilt: $\lambda \vec{x}_u + \mu \vec{x}_v = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{matrix}$ (3. Komp.)

\vec{x}_u, \vec{x}_v sind für $u \neq 0$ lin. unabh. (Tpte an u-Linie, Tpte an v-Linie)

2. Weg: $\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} u \cos v \\ -\sqrt{2} u \sin v \\ u \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ für $u \neq 0$ (Kegelspitze O ist einziger singulärer Pkt)

$\phi|_G$ ist nicht einfach, da für $v \in \mathbb{R}$ die Breitenkreise mehrfach durchlaufen werden \Rightarrow Einschränkung auf (v-Linien)

$\tilde{G} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0, -\pi \leq v < \pi\}$ heißt einfache Fläche.

c) $u=e^t, v=t \Rightarrow \vec{y}(t) := \vec{x}(u(t), v(t)) = e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{y}}(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \sin t + \cos t \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

$\Rightarrow c$ ist regulär $\forall t \in \mathbb{R}$

ϕ regulär d.h. \vec{x}_u, \vec{x}_v sind lin. unabh.

2. Weg: $\dot{\vec{y}}(t) = \vec{x}_u \dot{u} + \vec{x}_v \dot{v} \neq \vec{0} \Leftrightarrow (\dot{u}, \dot{v}) = (e^t, 1) \neq (0,0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Kettenregel

$$d) s = \int \sqrt{\dot{\vec{y}}(t)^2} dt = \int \sqrt{(\vec{x}_u \dot{u} + \vec{x}_v \dot{v})^2} dt = \int \sqrt{\vec{x}_u^2 \dot{u}^2 + 2\vec{x}_u \vec{x}_v \dot{u} \dot{v} + \vec{x}_v^2 \dot{v}^2} dt$$

mit $\underbrace{\vec{x}_u^2}_{g_{11}} = 3$, $\underbrace{\vec{x}_u \vec{x}_v}_{g_{12}} = 0$, $\underbrace{\vec{x}_v^2}_{g_{22}} = u^2 = e^{2t}$ und $\dot{u} = e^t$, $\dot{v} = t \Rightarrow$
metrische Fundamentalfunktion

$$s = \int \sqrt{3 \cdot e^{2t} + 0 + e^{2t}} dt = \int 2e^t dt = \underline{2e^t + \text{const}}$$

2. Weg: direkt $\dot{\vec{y}}(t)^2 = e^{2t} \cdot (1 + 1 + 2) = 4e^{2t} \Rightarrow |\dot{\vec{y}}(t)| = 2e^t$ (*)

e) Winkel φ am c zu u-Linie ($v = v_0 = \text{const}$): $\varphi = \angle(\dot{\vec{y}}, \vec{x}_u)$

$\vec{\Gamma}_{yt}$ am c $\vec{\Gamma}_{xt}$ am u-Linie

$$\cos \varphi = \frac{\dot{\vec{y}} \cdot \vec{x}_u}{|\dot{\vec{y}}| |\vec{x}_u|} = \frac{(\vec{x}_u \dot{u} + \vec{x}_v \dot{v}) \cdot \vec{x}_u}{|\dot{\vec{y}}| \sqrt{\vec{x}_u^2}} = \frac{g_{11} \dot{u} + g_{12} \dot{v}}{|\dot{\vec{y}}| \sqrt{g_{11}}} = \frac{3 \cdot e^t}{2e^t \sqrt{3}} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

(*)

$\Rightarrow \underline{\varphi = 30^\circ}$

Zu T27:

Drehkegel mit Parameterlinien, Flächenkurve und deren Tangente in $\vec{x}(u(t), v(t))$.

