Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert
Lena Polke, Michael Strobel

Geometriekalküle WS 2019/20
https://geo.ma.tum.de/de/lehre/geometriekalkuele.html
Aufgabenblatt 1 (2019–10–21)

Level 0

Aufgabe 1. Grundlagen.

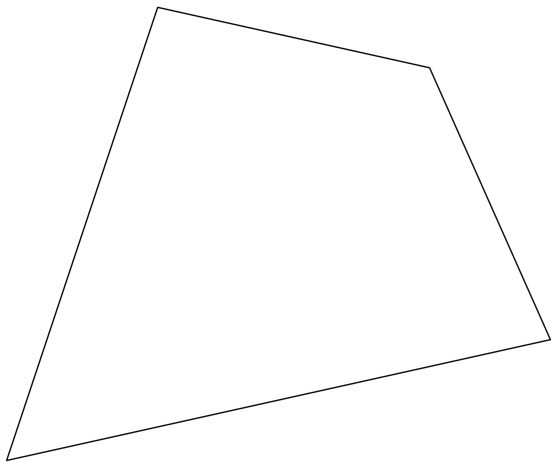
(a) Wie kann man in Standardeinbettung die homogen Koordinaten des Ursprungs, der x-Achse und der y-Achse bestimmen? Wie lauten sie?

(b) Kann jede Ebene im $\mathbb{R}^3$ als Einbettungsebene des $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{RP}^2$ dienen?

(c) Wie bestimmt man die homogenen Koordinaten der Gerade im Unendlichen in einer Einbettung, die nicht die Standardeinbettung ist?

(d) Gegeben zwei verschiedene Punkte P, Q im $\mathbb{RP}^2$. Wie beweist man, dass P auf $P \vee Q$ liegt?

(e) Wie kann man die unten stehende Zeichnung eines Schachbretts projektiv korrekt vervollständigen?



Aufgabe 2. Homogene Koordinaten.

Betrachten Sie die abgebildete (x, y)-Ebene in Standardeinbettung im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ und zeichnen Sie die gegebenen Objekte ein.

(a) Punkte mit homogenen Koordinaten:

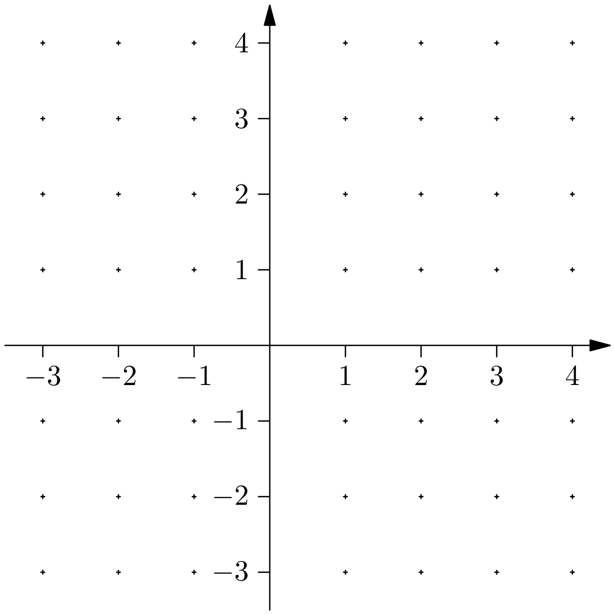
$$p_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad p_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad p_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

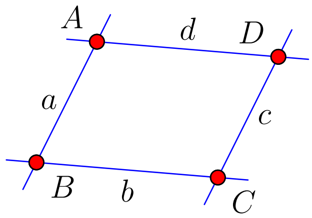
(b) Geraden mit homogenen Koordinaten:

$$l_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad l_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad l_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$l_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad l_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad l_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



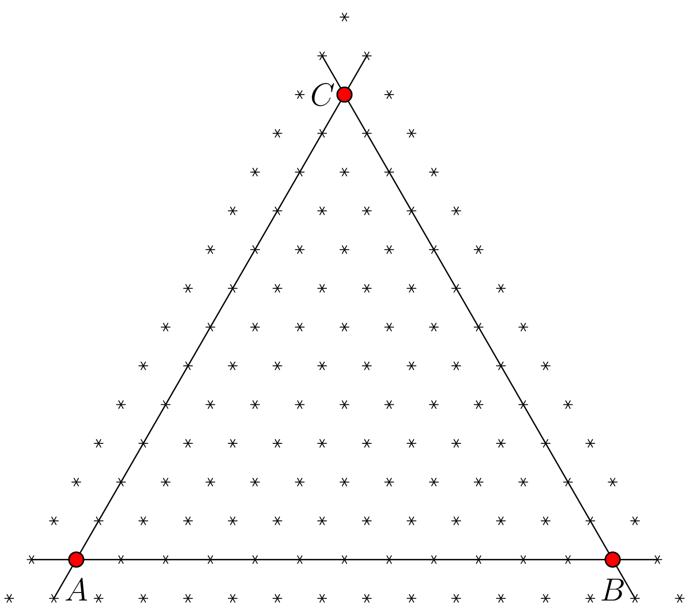
Aufgabe 3. Parallelogramm.



Gegeben seien die homogenen Koordinaten der Punkte A, B und C. Zusammen mit einem vierten Punkt D bilden diese ein Parallelogramm $ABCD$, wobei die Ecke D der Ecke B gegenüber liegt. Geben Sie eine Formel an, mit der die homogenen Koordinaten des Punktes D ausgerechnet werden können.

Aufgabe 4. Eine andere Einbettung.

Nun sei die euklidische Ebene im $\mathbb{R}^3$ nicht kanonisch auf $z = 1$ eingebettet, sondern so, dass sie durch die Punkte $A = (1,0,0)^T$, $B = (0,1,0)^T$ und $C = (0,0,1)^T$ des $\mathbb{R}^3$ verläuft. Rechts finden Sie eine Draufsicht auf die eingebettete Ebene.



(a) Skizzieren Sie die Lage der Ebene in einem dreidimensionalen Koordinatensystem.

(b) Zeichnen Sie die Punkte mit den folgenden homogenen Koordinaten in diese Draufsicht ein:

$$\begin{aligned} p_1 &= (1,1,0)^T \\ p_2 &= (1,1,1)^T \\ p_3 &= (-3,0,-1)^T \\ p_4 &= (2,1,1)^T \\ p_5 &= (-1,6,7)^T \end{aligned}$$

(c) Geben Sie die homogenen Koordinaten der Ferngerade dieser Einbettung an.

Aufgabe 5. Dualität.

Gegeben seinen rein abstrakte Objekte, die wir „Punkte“ und „Geraden“ nennen. Für diese Objekten sollen die folgenden drei Axiome gelten.

(i) *Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.*

(ii) *Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.*

(iii) *Es gibt vier paarweise verschiedene Punkte A, B, C, D, so dass keine drei von ihnen auf einer Geraden liegen.*

Zeigen Sie, dass der folgende Satz gilt, indem Sie ausschließlich die obigen Axiome verwenden:

Es gibt vier paarweise verschiedene Geraden a, b, c, d, so dass sich keine drei von ihnen in einem Punkt schneiden.