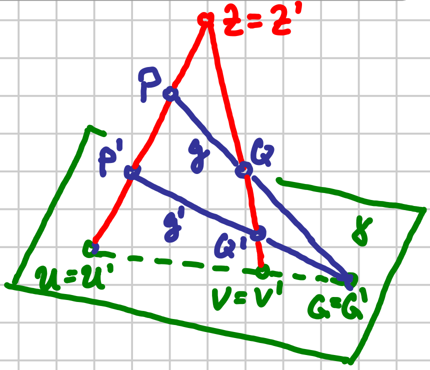
Geometrie LB Übungen Blatt 5

Notiztitel 07.11.2014

aus Vorlesung

Betrachte: Kollineation κ (geradentreue, bijektive Abb.) mit Fixpunktebene γ und Fixpunkt $Z \notin \gamma$ und einen Punkt $P \notin \gamma \cup \{Z\}$.



Bezeichne die Bilder $P' = \kappa(P)$ und $g' = \kappa(g)$.

Es gilt: ZP ist eine Fixgerade

$ZP \cap \gamma = U = U' \Rightarrow (ZP)' = (ZU)' = Z'U' = ZU = ZP$

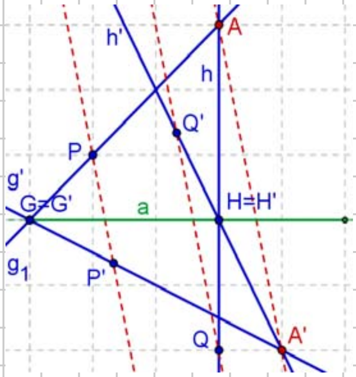
$\Rightarrow P' \in ZP$ mit $P' \notin \gamma \cup \{Z\} \Rightarrow PP'$ ist stets Fixgerade und enthält Z

Sind P und P' bekannt, so erhält man zu $Q \notin ZP \cup \gamma$ das Bild Q' auf ZQ mit dem Bild g' von $g = PQ$ als $Q' = ZQ \cap g'$. Dabei gilt: $g \cap \gamma = G = G' \Rightarrow g' = G'P'$

D.h. Aus (P,P') erhält man eindeutig (Q,Q') analog (R,R') und umgekehrt aus (Q,Q') und (R,R') wieder $(P,P') \Rightarrow$ Die Konstruktion ist unabhängig von der Wahl des Punkt-Bildpunktpaars, vgl. auch H8 zum proj. Desargues.

Im Fall $Q \in ZP$, $Q \neq Z$, $Q \notin \gamma$ wähle zur Konstr. von Q' (R,R') mit $Q \notin RR'$

T12. Im P^2 gegeben φ mit Fixpunktgerade a (Affinitätsachse) und Fernpunkt von AA' als Fixpunkt Z (Affinitätsrichtung $\parallel AA'$)



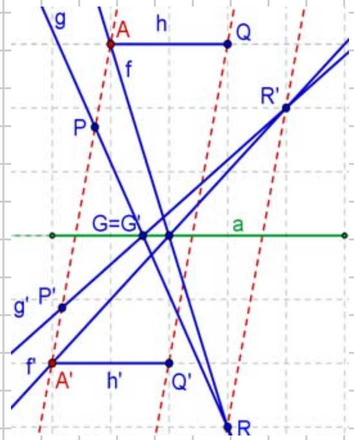
Für $P \notin a \cup \{Z\}$: $P' \in ZP$ = Parallele zu AA' durch P

$\Rightarrow PP' \parallel AA'$ (1) (Affinitätsstrahlen, Fixgeraden)

Für $P \notin AA'$ betrachte $g = AP$ mit $g \cap a = G = G'$ Fixpkt

$\Rightarrow g' = G'A' \Rightarrow P' \in g'$ (2) P' liegt auf Bild g' von g durch P

Mit (1) und (2) ist dann P eindeutig bestimmt



Analog erhält man Q'. **Sonderfälle:**

- Ist $h = AQ \parallel a \Rightarrow h \cap a = H = H'$ Fernpunkt von a

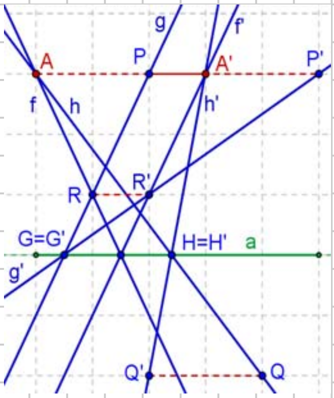
  $\Rightarrow h' = A'Q' = A'H'$ ist Parallele zu a durch A'

  Affin.strahl $\parallel AA'$ durch Q liefert Q'.

- Für $P \in AA'$ verwende z.B. (R,R') statt (A,A')

$\Rightarrow$ Eine ebene persp. Affinität φ ist durch a und (A,A') $(A, A' \notin a)$

eind. festgelegt und bildet parallele Geraden auf parallele Geraden ab.

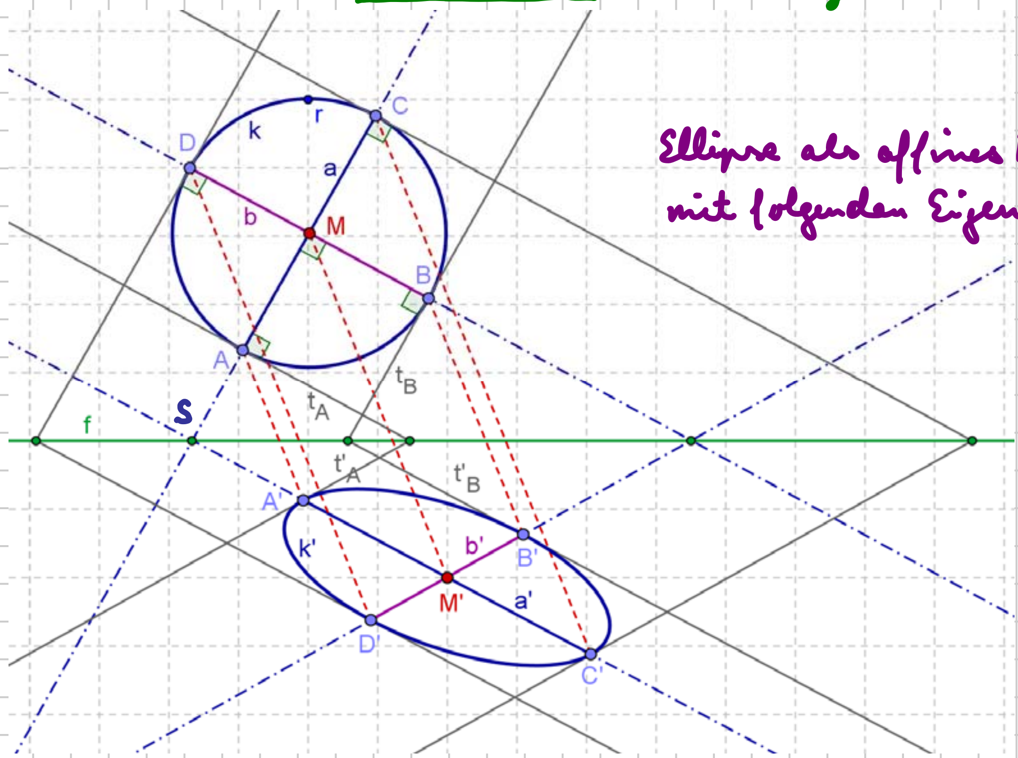


Spezialfall: vgl. T12_desargues.ggb

- Für $AA' \parallel a$ ist $Z \in a$! Wir ersetzen die Voraussetzung $Z \notin a$ durch die Bedingung Alle Geraden durch Z ($\parallel a$) sind Fixgeraden. Dann erhalten wir Q', R' und damit P' analog zu obigen. φ ist eine Scherung.

Bemerkung: Ist a die Ferngerade und Z eigentlich, so erhält man eine Zentrische Streckung mit Zentrum Z und $g' \parallel g$. Ist a die Ferngerade, $Z \in a$ und alle Geraden durch Z Fixgeraden so erhält man eine Translation in Richtung $Z \in a$ (Fernpunkt)

T13.



Ellipse als affines Kreisbild mit folgenden Eigenschaften:

Gegeben: Affinität φ Affinitäts-achse f = x-Achse Punkt-Bild punktpaar (M, M') $M = (0,3)$ $M' = (2,-2)$ und Kreis $k(M, r)$ mit Radius $r = 2$.

a) 1) Konstruiere zu $A \in k$ den Bildpunkt A' ⇒ Ellipse k' als Ortslinie von A', wenn A den Kreis k durchläuft.

2) Konstruiere das Bild $A'C'$ des Kreisdurchmessers AC und M'

Strahlensatz aus S ⇒ M' ist stets Mittelpunkt der Strecke $\overline{A'C'}$ d.h. der Ellipsenmittelpunkt

3) Konstruiere das Bild des zu AC orthogonalen Kreisdurchmessers BD ⊥ AC, sowie die Bilder der Kreistangenten in A und C (∥ BD)

Diese sind als Bilder paralleler Geraden zueinander parallel (∥ B'D')

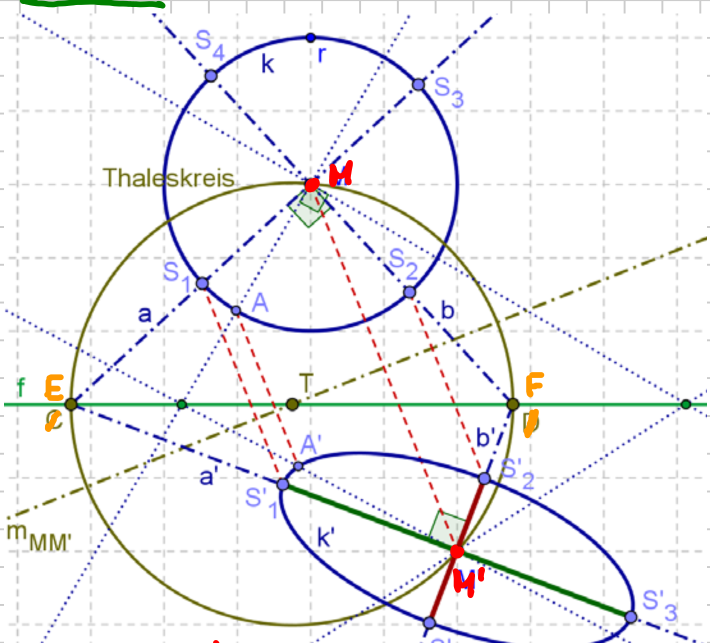
Da t_A die Kreislinie k in genau einem Punkt berührt, trifft t'_A die Ellipse k' auch genau in einem Punkt nämlich A' (vgl. Bijektivität von φ) d.h. t'_A ist Tangente an k' in A'.

4) Analog sind die Bilder der Tangenten in B und D parallel zu A'C'

Diese Eigenschaft an A'C' und B'D' als Bilder orthogonaler Kreisdurchmesser führt zur Definition konjugierter Ellipsendurchm.

Beachte: A'C' und B'D' sind i.a. nicht zueinander orthogonal

b)



1. Fall: $MM' \not\parallel f$

gesucht: Paar orthogonaler Geraden $EM \perp FM$ mit $E, F \in f$ (Aff.achse), die auf orthogonale Geraden $EM' \perp FM'$ abgebildet werden (d.h. die Dreiecke EFM und EFM' sind rechtwinklig → Thales) d.h. M und M' liegen auf dem Thaleskreis über $\overline{EF}$ um einen Mittelpunkt $\boxed{T \in f}$.

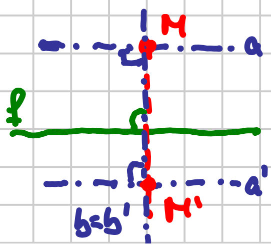
Die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei Punkte M und M' enthalten, liegen auf Mittellot $m_{MM'}$ von M und M' $\boxed{T \in m_{MM'}}$

$\Rightarrow \boxed{T = f \cap m_{MM'}}$ $\Rightarrow$ Der (Thales-)Kreis um T durch M und M' schneidet f in den gesuchten Punkten E und F.

2. Fall: $MM' \perp f$

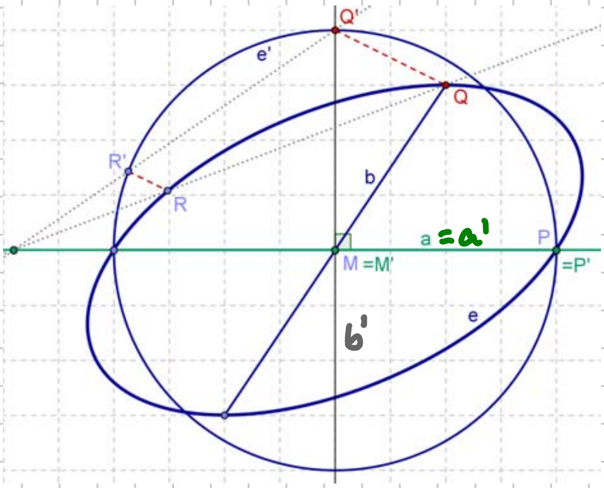
Wähle $b = b' = MM'$ und $M \in a \perp MM'$, $M' \in a' \perp MM'$

$a' \perp b'$ sind die Symmetrie-/Hauptachsen von k'.



Beachte: Gilt $MM' \perp f$ und Abstand Mf = Abstand $M'f$
$\Rightarrow$ φ ist Achsenspiegelung, d.h. k' ist ein Kreis.
Genau dann ist das Paar (a,b) der Hauptachsen nicht eindeutig, vgl. T13-3.ggb.

c) Sind konjugierte Halbmesser MP, MQ gegeben, so erhält man die zugehörige Ellipse als Kreisbild mittels einer ebenen persp. Affinität, die wie folgt festgelegt ist:



1) Wähle Durchmesser MP (oder MQ) als Affinitätsachse $a = MP = M'P'$
$\Rightarrow$ Ellipse e ist Bild des Kreises e' um M' durch P' und
2) MP und MQ Bilder orthogonaler Kreisdurchmesser
$M'P' \perp M'Q'$ $\Rightarrow$ Wähle $b' \perp a' = a$ mit $M \in b'$ und $Q' \in b' \cap e'$
(Dabei hat man 2 Möglichkeiten, beide liefern eine geeignete Aff.)
3) Dann legen Q und Q' mit der Achse a eine perspektive Affinität φ fest mit Affinitätsrichtung QQ'
4) Bestimme das Bild $R = \varphi^{-1}(R')$ zu einem Punkt $R' \in e'$ (Kreis) dann durchläuft R die Ellipse e, wenn R' den Kreis e' durchläuft

Anmerkung: Konstruktionen, bei denen der Ellipsenverlauf benötigt wird, führt man nach Wahl z.B. einer perspektiven Affinität am Kreis durch und überträgt die Ergebnisse zurück

z.B.

Affinität φ
Ell. $\to$ Kreis

$$\begin{tikzcd}
e \cap g \arrow[r, "?"] \arrow[d, "\varphi"] & S_1, S_2 \in e \cap g \\
e', g' \arrow[r, "\text{Konstruktion}", "\text{am Kreis}"'] & S_1', S_2' \in e' \cap g' \arrow[u, "\varphi^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Rücktransformation

(falls vorhanden)