Geometrie LB   Blatt 10   Übungen

Notiztitel   01.12.2014

T24 $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}3\cos t\\3\sin t\\t^2\end{pmatrix},\ \dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}-3\sin t\\3\cos t\\2t\end{pmatrix},\ \ddot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}-3\cos t\\-3\sin t\\2\end{pmatrix},\ \dddot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}3\sin t\\-3\cos t\\0\end{pmatrix}$

a) $(\dot{\vec{x}}(t))^2=9+4t^2>0\ \forall t\in(-\pi,\pi)\Rightarrow c$ ist regulär oder

$(\dot{\vec{x}}(t)=\vec{0}\overset{(3.\text{Komp.})}{\Rightarrow} t=0\overset{(2.\text{Komp.})}{\Rightarrow} 3\cdot\cos \underset{=0}{t}=3\neq 0\Rightarrow$ Regularität$)$

$\vec{x}(t_1)=\vec{x}(t_2)\overset{(3.\text{Komp.})}{\Rightarrow} t_1=\overset{\text{klar}}{(\pm)}t_2\Rightarrow$ $t_1=-t_2$

1\. Komp. $\underbrace{3\cos(-t_2)}_{=3\cos t_2}=3\cos t_2$ ✓

2\. Komp. $\underbrace{3\sin(-t_2)}_{=-3\sin t_2}=3\sin t_2$

$\Leftrightarrow 6\sin t_2=0\Leftrightarrow t_2=k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ mit $t_2\in(-\pi,\pi)\Rightarrow k=0,\ t_1=t_2=0$ ✓

Für $k=1$ folgt: $\underset{A}{\vec{x}(-\pi)}=\begin{pmatrix}-3\\0\\\pi^2\end{pmatrix}=\underset{E}{\vec{x}(\pi)}$ (Doppelpunkt in $[-\pi,\pi]$)

b) zugehörige Tangentenvektoren: $\dot{\vec{x}}(\pi)=\begin{pmatrix}0\\-3\\2\pi\end{pmatrix}\nparallel\dot{\vec{x}}(-\pi)=\begin{pmatrix}0\\-3\\-2\pi\end{pmatrix}$.

c) $s=\int_{-\pi}^{\pi}|\dot{\vec{x}}(t)|\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{9+4t^2}\,dt=2\cdot\int_0^{\pi}2\cdot\sqrt{\frac{9}{4}+t^2}\,dt=$

Symmetrie   Formelsammlung

$=2\cdot\left(t\sqrt{\frac{9}{4}+t^2}+\frac{9}{4}\operatorname{arsinh}\frac{2t}{3}\right)\Big|_0^{\pi}=\underline{\pi\sqrt{9+4\pi^2}+\frac{9}{2}\operatorname{arsinh}\frac{2\pi}{3}}\approx 28{,}56$

d) Schmiegebene σ: $\vec{y}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{x}(t)+\lambda\dot{\vec{x}}(t)+\mu\cdot\ddot{\vec{x}}(t),\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$

Punkt-Richtungsform

hat Normale $\dot{\vec{x}}(t)\times\ddot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}-3\sin t\\3\cos t\\2t\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\cos t\\-3\sin t\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\cos t+6t\sin t\\6\sin t-6t\cos t\\9\end{pmatrix}$

Richtung des Binormalenvektors

$\Rightarrow\sigma:\ (\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}})\cdot(\vec{y}-\vec{x})=0\Leftrightarrow(\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}})\cdot\vec{y}=(\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}})\cdot\vec{x}$ $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\cos t\\3\sin t\\t^2\end{pmatrix}$

Einsetzen liefert Koord.gleichung

$\underline{\sigma: 6(\cos t+t\sin t)\cdot x+6(\sin t-t\cos t)\cdot y+9z=18+9t^2}$

$R(0,0,6)\in\sigma\Leftrightarrow 54=18+9t^2\Leftrightarrow 9t^2=36\Leftrightarrow t=\pm2\Rightarrow\underline{\vec{x}(\pm2)=\begin{pmatrix}3\cos 2\\\pm3\sin 2\\4\end{pmatrix}}$

Koord. Einsetzen.

(2\. Weg über Punkt-Richtungsform umständlicher?)

e) Krümmung $\kappa(t) = \dfrac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3}$ (allgem. Param.), Torsion $\tau(t) = \dfrac{\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}})}{(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2}$ (allgem. Param.)

$(\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t))^2 = 36 + 36t^2 + 81 = 117 + 36t^2 \Rightarrow \kappa(t) = \dfrac{\sqrt{117+36t^2}}{\sqrt{(9+4t^2)^3}}$

$\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}}) = \det(\dot{\vec{x}} + \dddot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}}) = \det\begin{pmatrix} 0 & -3\cos t & 3\sin t \\ 0 & -3\sin t & -3\cos t \\ 2t & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2t \cdot 9 = 18t$

Determinantenumformungen — Entwicklung nach 1. Spalte

Spatprodukt

2. Weg: $\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}}) = (\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}) \cdot \dddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 6\cos t + 6t\sin t \\ 6\sin t - 6t\cos t \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3\sin t \\ -3\cos t \\ 0 \end{pmatrix} = 18t$

$\Rightarrow \tau(t) = \dfrac{18t}{117+36t^2} = \dfrac{2t}{13+4t^2}$

Zusatz!

$\kappa(t)$ extremal $\Leftrightarrow (\kappa(t))^2 = \dfrac{117+36t^2}{(9+4t^2)^3} =: f(t)$ extremal

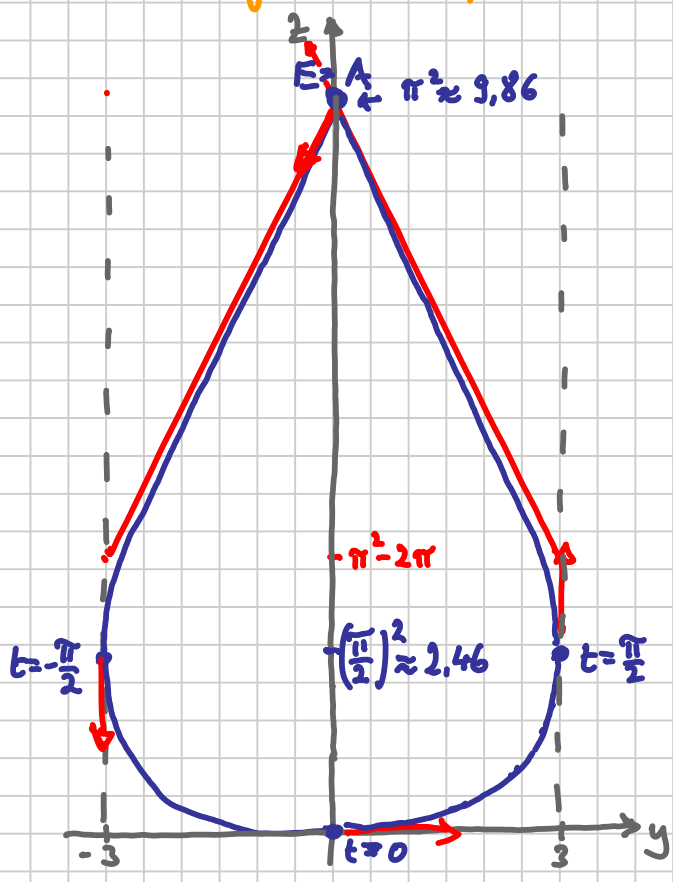
$\Leftrightarrow \dot{f}(t) = \dfrac{df}{dt} = \dfrac{72t(9+4t^2)^{\cancel{3}\,1} - (117+36t^2)\cdot 3 \cdot \cancel{(9+4t^2)^2} \cdot 8t}{(9+4t^2)^{\cancel{6}\,4}} = 0 \Leftrightarrow$ Zähler 0

$\Leftrightarrow 24t\,[3\cdot(9+4t^2) - (117+36t^2)] = 0 \Leftrightarrow t\,[\underbrace{-90-24t^2}_{<0\ \forall t\,!}] = 0 \Leftrightarrow \underline{t=0}$

f) Normalprojektion c^*: $\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sin t \\ t^2 \end{pmatrix}$, $t \in [-\pi, \pi]$

(durch Weglassen von $x(t)$)

$\begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 2t \end{pmatrix}$



Betrachte Punkte und Tangentenrichtungen für $t=0$, $t=\pm\frac{\pi}{2}$, $t=\pm\pi$

Zusatz: c liegt auf dem Drehzylinder $\Delta: x^2+y^2=9$ mit z-Achse als Drehachse (klar durch Einsetzen!)

Aus obigen Formeln für $\kappa(t)$ und $\tau(t)$ ergeben sich im Fall dass t die Bogenlänge ist die Formeln $\kappa(s)$ und $\tau(s)$, da t ist Bogenlänge $\Leftrightarrow |\dot{\vec{x}}(t)| = 1\ \forall t$ und $(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2 = (\dot{\vec{x}})^2(\ddot{\vec{x}})^2 - (\dot{\vec{x}}\cdot\ddot{\vec{x}})^2$

Lagrange $= (\ddot{\vec{x}})^2$ $\quad \dot{\vec{x}}\cdot\ddot{\vec{x}} = 0$

$\Rightarrow \kappa = |\ddot{\vec{x}}|$ und $\tau = \dfrac{\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}})}{(\ddot{\vec{x}})^2}$

T25 $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} t\\ 4-3t^2\\ 6t^3\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}$, $\dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix} 1\\ -6t\\ 18t^2\end{pmatrix}$, $\ddot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix} 0\\ -6\\ 36t\end{pmatrix}$, $\dddot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 36\end{pmatrix}$

a) c regulär $\Leftrightarrow$ $\dot{\vec{x}}(t)\neq\vec{0}\ \forall t\in\mathbb{R}$ klar wegen 1. Komponente

c doppelpunktfrei $\Leftrightarrow$ Aus $\vec{x}(t_1)=\vec{x}(t_2)$ folgt $t_1=t_2$
klar wegen 1. Komponente

c W-punktfrei $\Leftrightarrow$ $\dot{\vec{x}}(t)$ und $\ddot{\vec{x}}(t)$ sind für alle $t\in\mathbb{R}$ linear unabhängig, d.h. spannen die Schmiegebene in $\vec{x}(t)$ auf

($\Leftarrow$ Ansatz $\lambda\dot{\vec{x}}(t)+\mu\ddot{\vec{x}}(t)=\vec{0}$ $\Rightarrow$ 1. Komp. $\lambda=0$ und 2. Komp. $\mu=0$)

Kurve im $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow\Leftrightarrow$ $\dot{\vec{x}}(t)\times\ddot{\vec{x}}(t)\neq\vec{0}$ für alle $t\in\mathbb{R}$

$$\dot{\vec{x}}(t)\times\ddot{\vec{x}}(t)=6\cdot\begin{pmatrix} 1\\ -6t\\ 18t^2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0\\ -1\\ 6t\end{pmatrix}=6\cdot\begin{pmatrix} -18t^2\\ -6t\\ -1\end{pmatrix}\neq\vec{0}$$ wegen 3. Komponente

b) Bogenlänge $(\dot{\vec{x}}(t))^2=1+36t^2+(18t^2)^2=(1+18t^2)^2$

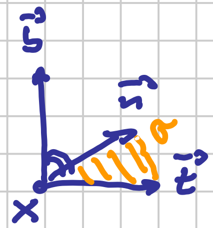
$$s(t)=\int_{t_0=0}^{t}|\dot{\vec{x}}(u)|\,du=\int_0^t\sqrt{(\dot{\vec{x}}(u))^2}\,du=\int_0^t 1+18u^2\,du=u+6u^3\Big|_0^t=\underline{t+6t^3}$$
$t_0=0$ o.E.

Krümmung $$\kappa(t)=\frac{|\dot{\vec{x}}(t)\times\ddot{\vec{x}}(t)|}{|\dot{\vec{x}}(t)|^3}=\frac{6\cdot(18t^2+1)}{(1+18t^2)^3}=\underline{\frac{6}{(1+18t^2)^2}}$$

$$(\dot{\vec{x}}(t)\times\ddot{\vec{x}}(t))^2=36\cdot[(18t^2)^2+36t^2+1]=36\cdot(18t^2+1)^2$$

Torsion $$\tau(t)=\frac{\det(\dot{\vec{x}}\ \ddot{\vec{x}}\ \dddot{\vec{x}})}{(\dot{\vec{x}}(t)\times\ddot{\vec{x}})^2}=\frac{-6\cdot 36}{36(1+18t^2)^2}=\underline{\frac{-6}{(1+18t^2)^2}}$$

$$\det(\dot{\vec{x}}\ \ddot{\vec{x}}\ \dddot{\vec{x}})=\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -6t & -6 & 0\\ 18t^2 & 36t & 36\end{pmatrix}=-6\cdot 36$$



c) Frenet-Dreibein $\vec{t}(t)$, $\vec{n}(t)$, $\vec{b}(t)$ (ONB)

$\vec{t}(t)$ Tangenten(einheits)vektor $$\vec{t}(t)=\frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|}=\underline{\frac{1}{1+18t^2}\begin{pmatrix} 1\\ -6t\\ 18t^2\end{pmatrix}}$$

$\vec{n}(t)$ (Haupt)Normalenvektor und $\vec{b}(t)$ Binormalenvektor

$\vec{n}(t)$ spannt (in nicht-W-Punkt) zusammen mit $\vec{t}(t)$ die Schmiegebene σ: $\vec{y}=\vec{x}(t)+\lambda\dot{\vec{x}}(t)+\mu\ddot{\vec{x}}(t)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ auf.

Deren Normalenvektor ist (im $\mathbb{R}^3$) der Binormalenvektor

$$\vec{b}(t) = \frac{\dot{\vec{x}}(t)\times\ddot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)\times\ddot{\vec{x}}(t)|} = \underline{\frac{-1}{1+18t^2}\begin{pmatrix}18t^2\\6t\\1\end{pmatrix}} \Rightarrow$$

$$\vec{n}(t) = \vec{b}(t)\times\vec{t}(t) = \frac{-1}{(1+18t^2)^2}\begin{pmatrix}18t^2\\6t\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-6t\\18t^2\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{(1+18t^2)^2}\begin{pmatrix}6t(18t^2+1)\\1-(18t^2)^2\\-6t(18t^2+1)\end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{1+18t^2}\begin{pmatrix}-6t\\18t^2-1\\6t\end{pmatrix}}$$

$1-(18t^2)^2 = (1+18t^2)(1-18t^2)$

d) $\alpha = \sphericalangle(\dot{\vec{x}},\vec{a})$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\dot{\vec{x}}\cdot\vec{a}}{|\dot{\vec{x}}||\vec{a}|} = \frac{1+18t^2}{(1+18t^2)\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow \underline{\alpha = 45°}$

<u>Zusatz:</u> Wie folgt, kann man zu c die Böschungsrichtung bestimmen: <u>nicht verlangt</u>!

c ist Böschungslinie $\Leftrightarrow \exists\, \vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ mit $\cos\underbrace{\sphericalangle(\dot{\vec{x}},\vec{a})}_{=\alpha} = \frac{\dot{\vec{x}}(t)\cdot\vec{a}}{|\dot{\vec{x}}(t)||\vec{a}|} = c = \text{const.}\ \forall t\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \dot{\vec{x}}(t)\cdot\vec{a} = |\dot{\vec{x}}(t)|\cdot\tilde{c}\quad \forall t\in\mathbb{R}$ mit $\tilde{c} = |\vec{a}|\cdot c$ = const.

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\-6t\\18t^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = (1+18t^2)\cdot\tilde{c}\quad \forall t\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow a_1 - 6t\,a_2 + 18t^2 a_3 = \tilde{c} + 18t^2\cdot\tilde{c}\quad \forall t\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (a_1-\tilde{c}) - 6t\,a_2 + 18t^2(a_3-\tilde{c}) = 0\quad \underline{\forall t\in\mathbb{R}}$.

Analysis

$\Leftrightarrow a_1-\tilde{c}=0$ <u>und</u> $a_2=0$ <u>und</u> $a_3-\tilde{c}=0 \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix}\tilde{c}\\0\\\tilde{c}\end{pmatrix}$ mit $\tilde{c}\neq 0$

Böschungsrichtung

Die Funktionen $t^0, t^1, t^2, \dots t^n$, $n\in\mathbb{N}$ sind linear unabhängig
d.h. eine Linearkombination ist die Nullfunktion $\Leftrightarrow$ <u>alle</u> Koeff $=0$

2. Begründung ohne diesen Satz: Wähle $t=0 \Rightarrow a_1=\tilde{c}$, dividiere durch t und setze wieder $t=0 \Rightarrow a_2=0 \overset{\text{(nochmals)}}{\Rightarrow} a_3=\tilde{c}$

3. Weg: Wähle $t=0$, $t=1$, $t=-1 \Rightarrow$ LGS

$$\begin{aligned} a_1-\tilde{c} &= 0\\ a_1-\tilde{c}-6a_2+18(a_3-\tilde{c}) &= 0\\ a_1-\tilde{c}+6a_2+18(a_3-\tilde{c}) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow a_1 = \tilde{c} = a_3$ und $a_2 = 0$

(c ist Böschungslinie zur Richtung $\vec{a} = \tau\vec{t} + \kappa\vec{b} \Leftrightarrow \frac{\tau}{\kappa} = \cot\alpha = \text{const}$)

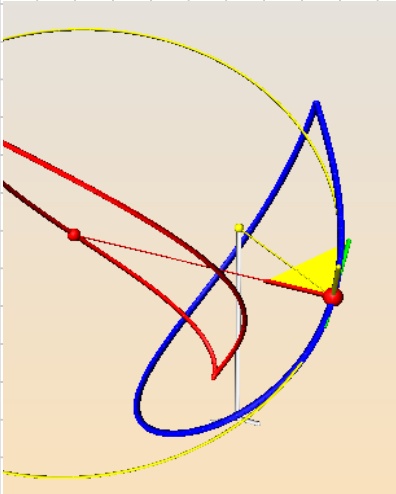
Figur zu T24.

mit Frenet-Dreibein

Schmiegebene (gelb)

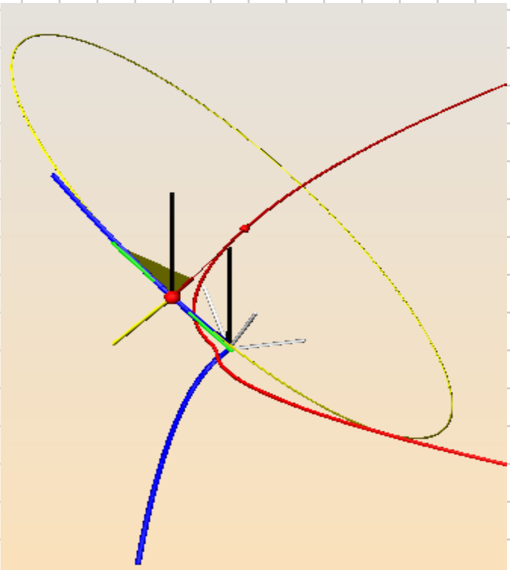
Krümmungskreis (gelb)

und Evolute (rot)



Figur zu T25 mit Böschungsrichtung (schwarz)

Krümmungskreis (gelb) und Evolute (rot)



Zusatz vgl. Kapitel <u>6.12.13</u>

Evolute: Kurve der Krümmungskreismittelpunkte

$$\vec{m}(t) = \vec{x}(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \cdot \vec{n}(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} t \\ 4-3t^2 \\ 6t^3 \end{pmatrix} + \frac{(1+18t^2)^{\cancel{2}}}{6} \cdot \frac{1}{\cancel{1+18t^2}} \begin{pmatrix} -6t \\ 18t^2-1 \\ 6t \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -18t^3 \\ \frac{23}{6} - 3t^2 + 54t^4 \\ t + 24t^3 \end{pmatrix}}$$

Param. darst. der Evolute.