

Geometrie für das Lehramt an beruflichen Schulen

Tutoraufgaben:

T17. Der folgende Satz sei mit S bezeichnet:

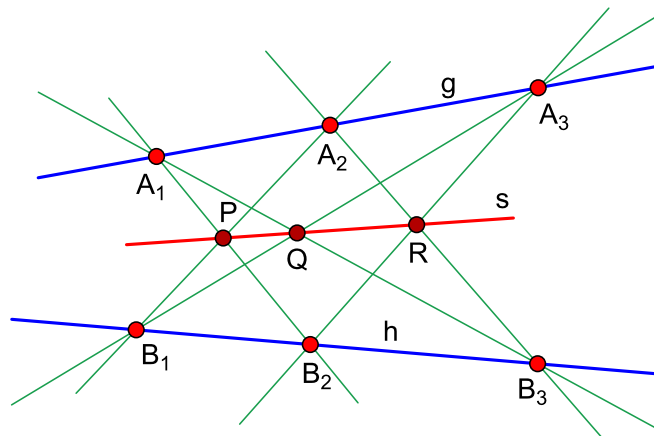
Seien g, h zwei verschiedene Geraden in einer projektiv erweiterten euklidischen Ebene P^2 und $Z \in P^2 \setminus (g \cup h)$. Dann gilt:

Vier paarweise verschiedene Geraden z_1, z_2, z_3, z_4 durch Z schneiden die beiden Geraden g und h in je vier Punkten G_1, G_2, G_3, G_4 bzw. H_1, H_2, H_3, H_4 mit der Eigenschaft:

$$DV(G_1, G_2, G_3, G_4) = DV(H_1, H_2, H_3, H_4)$$

- a) Dualisieren Sie den Satz S und bezeichnen Sie den dualen Satz mit S' .
- b) Begründen Sie die Gültigkeit der beiden Sätze S und S' .

T18. Dualisieren Sie die Aussage des Axioms von Pappos in der projektiven Ebene P^2 .



T19. Kreise, Ellipsen und Hyperbeln sind zueinander projektiv.

- a) Bestimmen Sie eine Projektivität $\vec{y} = U\vec{x}$ des P^2 , welche die Gerade $y=mx+b$ auf die Ferngerade $y_0 = 0$ abbildet.
- b) Bestimmen Sie das Bild des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ unter dieser Abbildung speziell für $m = 0$. Was ergibt sich für $b = 0, b = 1$ bzw. $b = 2$?

Hausaufgaben:

H15. Gegeben sei ein Kegelschnitt k in affinen xy -Koordinaten $x^2 - 4xy + ay^2 + 2y = 1$ mit konstantem $a \in \mathbb{R}$.

- a) Geben Sie eine Gleichung von k in homogenen Koordinaten an und stellen Sie diese in der Form $\vec{x}^T A \vec{x} = 0$ mit $A^T = A$ dar.
- b) Bringen Sie diese Gleichung durch quadratische Ergänzung auf projektive Normalform. Was gilt im Fall $a = 3$?
- c) Geben Sie für $a = 2$ die zugehörige projektive Abbildung $\vec{x} = U\vec{y}$ an und berechnen Sie $U^T A U$.

H16. Die Aussage des Satzes von Desargues in Aufgabe **H 8b)** für den projektiven Raum P^3 gilt auch in der projektiven Ebene P^2 .

- a) Dualisieren Sie den Satz von Desargues in der projektiven Ebene P^2 .
- b) Welcher Zusammenhang besteht in P^2 zwischen dem Satz von Desargues und dem zu ihm dualen Satz ?
- c) Wie kann man die beiden Sätze in P^2 in einem Satz zusammenfassen ?

H17. Dualisieren Sie die Aussage des Satzes von Desargues im projektiven Raum P^3 , vgl. **H 8**.

Hinweis: Beginnen Sie die duale Figur mit einem Dreieck in einer Ebene und wählen Sie dann einen Punkt oberhalb und einen Punkt unterhalb der Dreiecksebene.