Geometrie LB Ebene Kurven (als Raumkurven)

Notiztitel 18.01.2021

Betracht $c: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ in xy-Ebene des E^3

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ 0 \end{pmatrix},\ \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ 0 \end{pmatrix},\ \dddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dddot{x}(t) \\ \dddot{y}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det(\dot{\vec{x}}\ \ddot{\vec{x}}\ \dddot{\vec{x}}) = 0 \Rightarrow$ Torsion $\underline{\tau = 0}$ $\forall t \Leftrightarrow$ Besonderheit ebene Kurve

$$\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \det\begin{pmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \Rightarrow \kappa(t) = \frac{\det\begin{pmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{pmatrix}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^{\,3}}$$

ohne Betrag

Besonderheit: Krümmung ebener Kurven hat Vorzeichen

Krümmung von Raumkurven immer > 0.

$$\vec{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Besonderheit ebener Kurven $\vec{n}(t)$ direkt aus Komponenten von $\vec{t}$ $\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

FRENET-Abl.gl. mit $\tau = 0 \Rightarrow$ $\vec{t}\,' = \kappa \cdot \vec{n}$, $\vec{n}\,' = -\kappa\,\vec{t}$

<u>Streichen der z-Komponente liefert</u> i.a. nicht normiert

$$c: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},\ t \in I,\quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \parallel \vec{n}(t)$$

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}})}{|\dot{\vec{x}}|^3},\quad \vec{m}(t) = \vec{x}(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \cdot \vec{n}(t)$$