Geometrie LB Hausaufgaben Blatt 9

Notiztitel 24.11.2014

H21. $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $t = f(u)$

a) $\frac{d}{dt}\left[(\vec{x}'(t))^2\right] = \frac{d}{dt}\Big(\qquad \Big)$

analog zu $\frac{d}{dx}\left((g(x))^2\right) = 2\, g(x) \cdot g'(x)$

b) $\vec{y}(u) = \vec{x}(f(u))$ Komposition $y := x \circ f$, $J \to \mathbb{R}^n$; $u \mapsto \vec{x}(\underbrace{f(u)}_{t})$

$\dot{\vec{y}}(u) := \frac{d}{du}\vec{y}(u) = \frac{d}{du}(\vec{x}(f(u)) = \qquad =$

komponentenweise

Kettenregel! „Nachdiff."

$\frac{dx_i}{du} = \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dt}{du} = \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{df}{du}$

analog zur bekannten Kettenregel!
$\frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$= \dot{\vec{x}}(f(u)) \cdot \dot{f}(u)$

Produktregel

$\ddot{\vec{y}}(u) = \frac{d}{du}\dot{\vec{y}}(u) = \frac{d}{du}\left[\dot{\vec{x}}(f(u)) \cdot \dot{f}(u)\right] =$

Kettenregel wie oben!

$\dddot{\vec{y}}(u) = \frac{d}{du}\ddot{\vec{y}}(u) = \frac{d}{du}\left[\ddot{\vec{x}}(f(u)) \cdot (\dot{f}(u))^2 + \dot{\vec{x}}(f(u)) \cdot \ddot{f}(u)\right] =$

Produkt Summe Produkt

Kettenregel

$= \dddot{\vec{x}}(f(u)) \cdot (\dot{f}(u))^3 + \ddot{\vec{x}}(f(u)) \cdot 2 \cdot \dot{f}(u) \cdot \ddot{f}(u) + \ddot{\vec{x}}(f(u))\, \dot{f}(u) \cdot \ddot{f}(u) + \dot{\vec{x}}(f(u)) \cdot \dddot{f}(u)$

$= \dddot{\vec{x}}(f(u)) \cdot (\dot{f}(u))^3 + 3 \cdot \ddot{\vec{x}}(f(u)) \cdot \dot{f}(u)\, \ddot{f}(u) + \dot{\vec{x}}(f(u)) \cdot \dddot{f}(u) \qquad (*)$

Existieren die 3 ersten Ableitungen von x und f so auch von y!

Bem: y ist als Komposition injektiver Abbildungen auch injektiv

$\vec{y}(u_1) = \vec{y}(u_2) \Leftrightarrow \vec{x}(f(u_1)) = \vec{x}(f(u_2)) \Leftrightarrow f(u_1) = f(u_2) \Leftrightarrow u_1 = u_2$

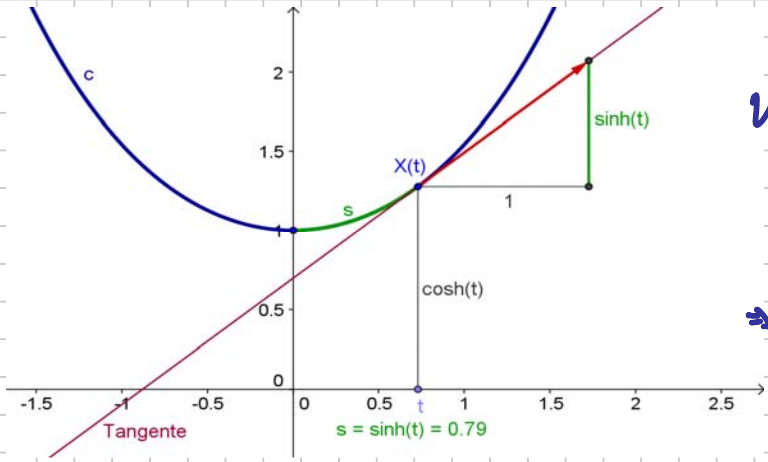
x ist injektiv $\qquad$ f ist injektiv

$\Rightarrow y = x \circ f$ ist injektiv.

H22. c: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ ⇒ d.h. c ist regulär

F.S. bzw. $\cosh^2 t - \sinh^2 t \overset{(*)}{=} \frac{1}{4}(e^{x}+e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^{x}-e^{-x})^2 = \frac{1}{4}\cdot 4 e^{x} e^{-x} = \underline{\underline{1}}$

$\Rightarrow s = s(t) := \int_0^t \sqrt{(\dot{\vec{x}}(\tau))^2}\, d\tau =$



vgl. Tangentensteigung!

Umkehrfunktion liefert

$\Rightarrow \vec{y}(s) = \vec{x}(t(s)) =$

Bogenlängen param.

Zusatz: Beispiel einer C^∞-Funktion f, die an einer Stelle x_0 nicht C^ω (analytisch) ist, d.h. dort nicht in eine Potenzreihe (Taylorreihe) entwickelt werden kann, die in einer Umgebung von x_0 gegen die Funktion konvergiert.

$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \Rightarrow f^{(k)}(0) = 0,\ k \in \mathbb{N}_0$

$\lim\limits_{x \to 0} e^{-\left(\frac{1}{x^2}\right) \to \infty} = 0$

⇒ Taylorreihe wäre: $T(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = 0$ Nullfunktion $\neq f(x)$ in Umgebung von 0