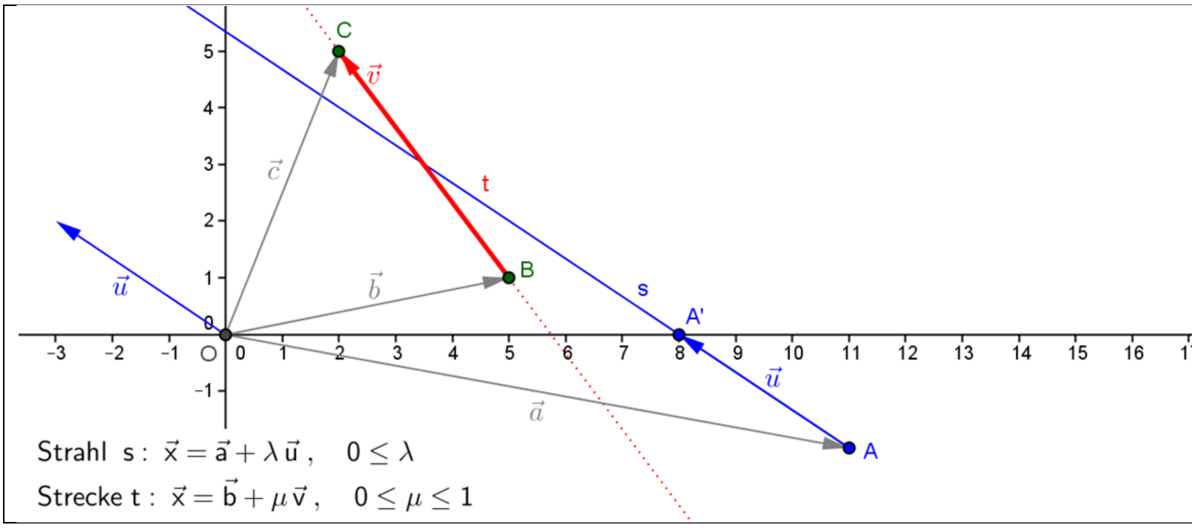
Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Dr. Hermann Vogel



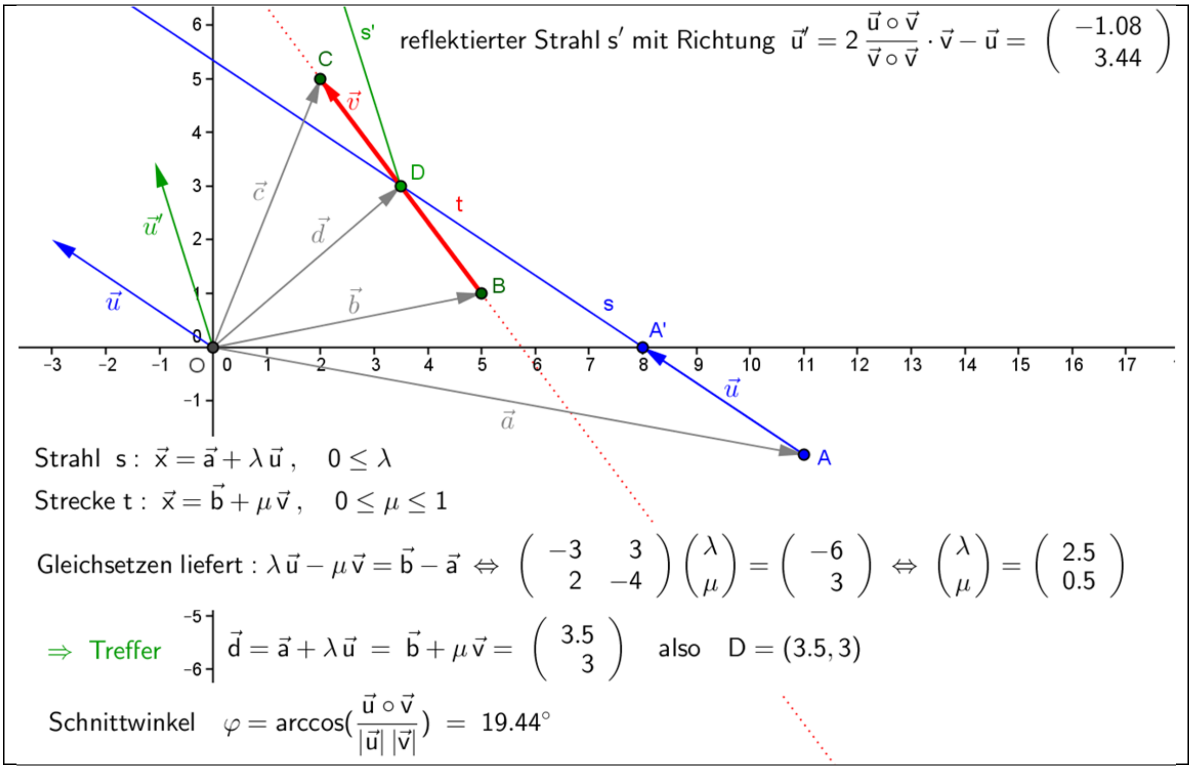
# Treffer oder nicht?

Im File **Treffer.ggb** ist die Richtung $\vec{u}$ ( **u=Vektor[(-3,2)]** ) eines Strahls s mit Anfangspunkt A sowie eine Strecke t = [B,C] (**Target**) und die (Orts-) Vektoren zu A, B und C gegeben.

Dabei wurde mit dem Werkzeug **Vektor von Punkt aus abtragen** durch Anklicken von u und A der Punkt A' und der Vektor u_A erzeugt und die Beschriftung jeweils als LaTeX-Formel eingegeben, z.B. **$\vec{u}$** siehe Eigenschaften -> Grundeinstellungen.




Ziel ist es, mit Hilfe der analytischen Geometrie möglichst effizient festzustellen, ob der Strahl s das Target t trifft, und in diesem Fall den reflektierten Strahl s' zu bestimmen.

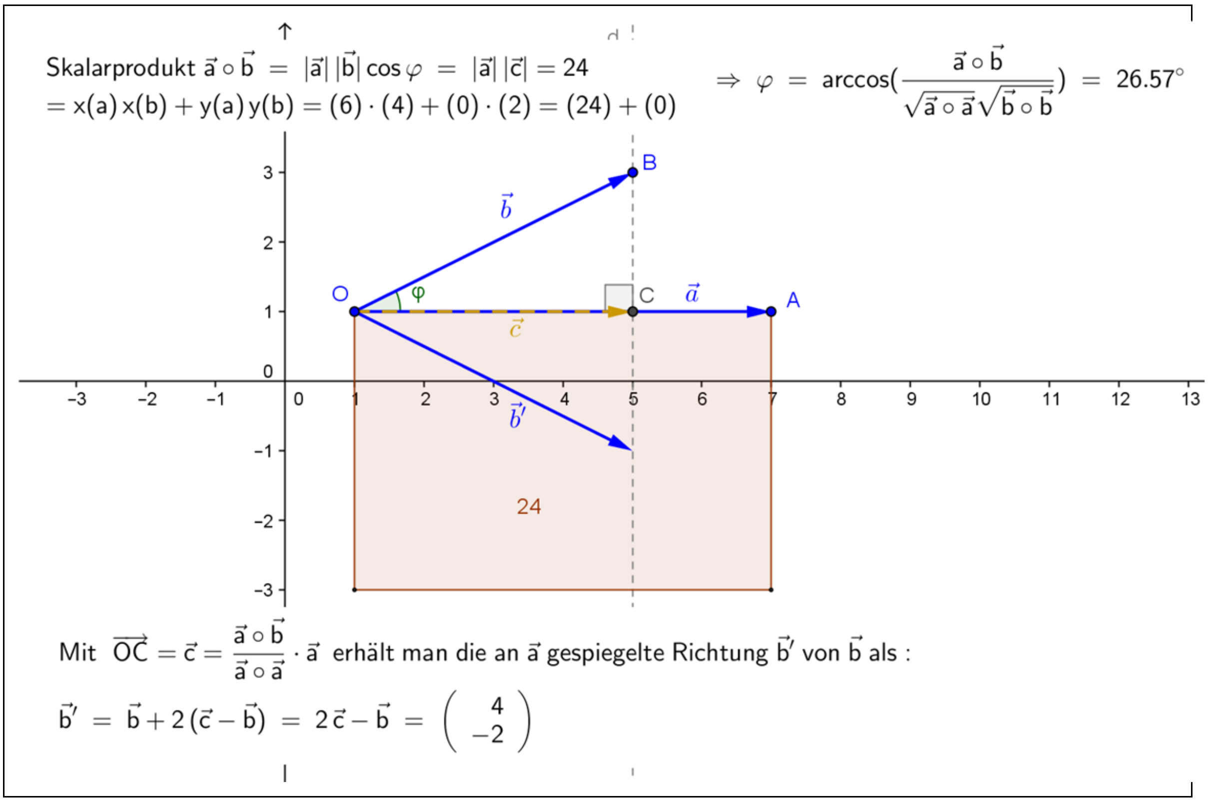



Dazu verwendet man jeweils die Punkt-Richtungsform zur Darstellung von s und t. Durch Gleichsetzen erhält man ein Lineares Gleichungssystem (LGS) dessen Koeffizientenmatrix man in GeoGebra als Liste von Listen eingibt: **M = {{x(u), -x(v)}, {y(u), -y(v)}}** .

Wenn die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ linear unabhängig sind (d.h. s und t nicht parallel liegen), erhält man die Lösung des LGS dann einfach als **l = M^(-1)(b-a) ,** wobei $\lambda$ **= x(l)** und $\mu$ **= y(l)** ist. Damit kann man bereits entscheiden, ob ein Treffer vorliegt oder nicht, vgl. den Wahrheitswert **ww = Wenn[(x(l) > 0) ∧ (0 ≤ y(l)) ∧ (y(l) ≤ 1), true, false].**

Mit diesem Wahrheitswert kann man nun den LaTeX-Text **\Rightarrow \; \; Treffer** oder **\Rightarrow \; \; kein \; Treffer** ein- bzw. ausblenden.

Im Fall des Treffers erhält man die Koordinaten von D als **d = a + x(l) u** sowie den Schnitt-winkel $\varphi$ **= arccos(u v / sqrt(u u) / sqrt(v v))** , wobei **u v** bzw. **u*v** das Standard-**Skalar-produkt** von Vektoren liefert, siehe auch das File **Skalarprodukt.ggb**, in dem auch die Formel für die Richtung $\vec{u}'$ des reflektierten Strahls angegeben ist. Um $\varphi$ als Winkel im Gradmaß auszugeben, muss man dies unter Eigenschaften -> Erweitert auswählen.




Physikalisch ist die Arbeit das Produkt der Kraft in Richtung des Weges mit der Länge des Weges und führt auf die Definition des Skalarprodukts $W = \vec{F} \bullet \vec{s} = |\vec{F}||\vec{s}|\cos\angle(\vec{F},\vec{s})$.

Dabei folgt aus der rechten Seite der Definition $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$ direkt die positive Definitheit $\vec{a} \bullet \vec{a} = |\vec{a}|^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{o}$ , die Orthogonalität $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$ und die Symmetrie $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$ . Mit der Bilinearität $(\lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}) \bullet \vec{c} = \lambda\,(\vec{a} \bullet \vec{c}) + \mu\,(\vec{b} \bullet \vec{c})$ ergibt sich bezogen auf die Orthonormalbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}\, mit\ \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1 = 1\,, \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2 = 0\,, \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2 = 1$ des kartesischen Koordinatensystems automatisch das Standard-Skalarprodukt:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) \bullet (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2) = \cdots = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

**Anmerkungen zu obiger Fragestellung: Trifft der Strahl s das Target t?**

**1)** Einsetzen der Punkt-Richtungsform des Strahls s in die Koordinatengleichung der Gera-den BC liefert den Schnittpunkt D = s ∩ BC aber nicht die Lage von D zur Strecke [B,C].

**2)** Mit orientierten Flächeninhalten von Dreiecken könnte man schnell feststellen, ob B und C auf verschiedenen Seiten des Strahls liegen. Das reicht aber nicht als Treff-Kriterium.

Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Dr. Hermann Vogel

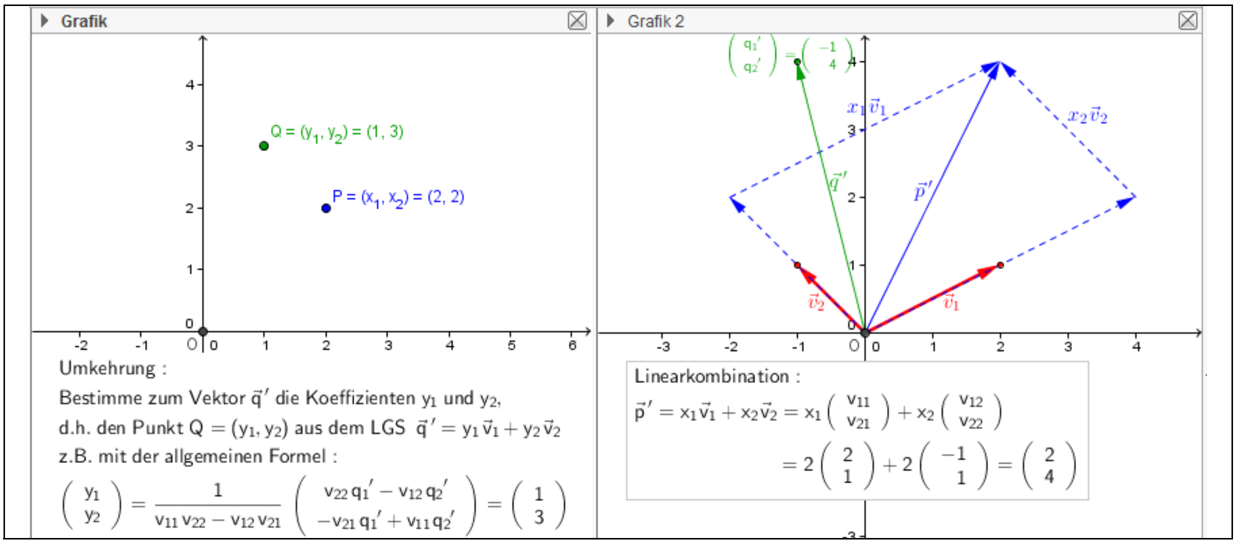


# Von einer Linearkombination zur linearen Abbildung

Öffne neben dem Grafik-Fenster ein zweites (**Ansicht -> Grafik2**) und ordne beide Fenster nebeneinander. Gib in beiden Fenstern ein Koordinatensystem mit dem Ursprung O = (0,0) aus. Setze dazu z.B. **O = Schneide[xAchse, yAchse]** und wähle unter **Eigenschaften -> Erweitert** unten:


Wähle dann in Grafik 2 zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, setze unter **Eigenschaften -> Grundeinstellungen** bei Beschriftung **$\vec{v}_1** (bzw. 2) **$** und wähle „Beschriftung" unter „Beschriftung anzeigen".

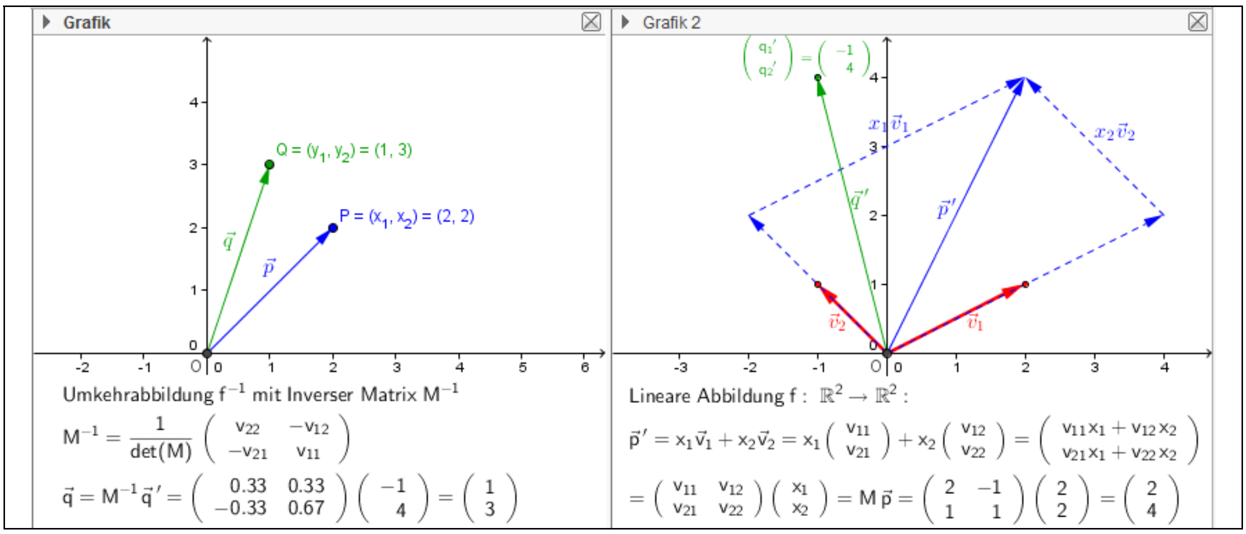
Wähle dann in Grafik einen Punkt P und bestimme in Grafik 2 die Linearkombination von $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, mit den Koordinaten $x_1$=x(P) und $x_2$=y(P) als Koeffizienten.




Wählt man unter „Beschriftung" bei P „Name & Wert", so steht dort: **P = (2, 2)**. Um dort **P = ($x_1$, $x_2$) = (2, 2)** auszugeben, setze einen Text **P = (x_1, x_2) = (Objekt P)** und positioniere ihn unter **Eigenschaften -> Position** am Punkt P.

Wähle dann in Grafik 2 einen Vektor $\vec{q}'$ und bestimme die Koeffizienten $y_1$ und $y_2$ der Linearkombination von $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, die in Grafik einen Punkt Q = ($y_1$, $y_2$) festlegen. Den Text am Vektor $\vec{q}'$ erhält man mit **\left(\begin{array}{} q_1' \\ q_2' \\ \end{array} \right) = (Objekt q')** .

Die Lösung des LGS $\vec{q}' = y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2$ erhält man elementargeometrisch oder mit der angegebenen allgemeinen Lösungsformel. Einfacher geht es mit Hilfe der **Linearen Algebra**:



Betrachte den Vektor $\vec{\boldsymbol{p}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OP}}$ als Vektor ( **p = Vektor[P]** oder **Vektor[O,P]** ) des **Vektorraums ( IR², + , ·)** und die Linearkombination als **lineare Abbildung**

$$\textbf{f: } \vec{\boldsymbol{p}} \to \vec{\boldsymbol{p}}' = \boldsymbol{M}\,\vec{\boldsymbol{p}} \quad \text{mit der Matrix} \quad \boldsymbol{M} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1\,\vec{\boldsymbol{v}}_2) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_{11} & \boldsymbol{v}_{12} \\ \boldsymbol{v}_{21} & \boldsymbol{v}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}.$$

Sind die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ linear unabhängig, so ist diese Abbildung eineindeutig, d.h. es existiert die **Umkehrabbildung**

$$\textbf{f}^{-1}\textbf{: } \vec{\boldsymbol{p}}' \to \vec{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{M}^{-1}\,\vec{\boldsymbol{p}}' \quad \text{mit der Matrix} \quad \boldsymbol{M}^{-1} = \frac{1}{det(M)} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_{22} & -\boldsymbol{v}_{12} \\ -\boldsymbol{v}_{21} & \boldsymbol{v}_{11} \end{pmatrix}.$$

**Beachte:** $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sind linear abhängig $\Leftrightarrow$ $det(M) := \boldsymbol{v}_{11}\,\boldsymbol{v}_{22} - \boldsymbol{v}_{12}\,\boldsymbol{v}_{21} = 0$ .

In GeoGebra gibt man Matrizen als Listen von Listen ein, hier:

**M = { {x(v_1), x(v_2)} , {y(v_1), y(v_2) } }** und erhält damit **p' = M p** und **q = M^(-1) q'** .

Da $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ veränderlich sind, d.h. ggfs. linear abhängig sind, wird im File **Linearkombination.ggb** die inverse Matrix nur im Fall $\boldsymbol{det(M)} = \boldsymbol{v}_{11}\,\boldsymbol{v}_{22} - \boldsymbol{v}_{12}\,\boldsymbol{v}_{21} \neq 0$ erzeugt, vgl. **M'** und der Wahrheitswert **ww = Wenn[ Determinante[M] $\stackrel{?}{=}$ 0, false, true]** , mit dem auch einige Objekte ausgeblendet werden.

# Ausblick in die Lineare Algebra

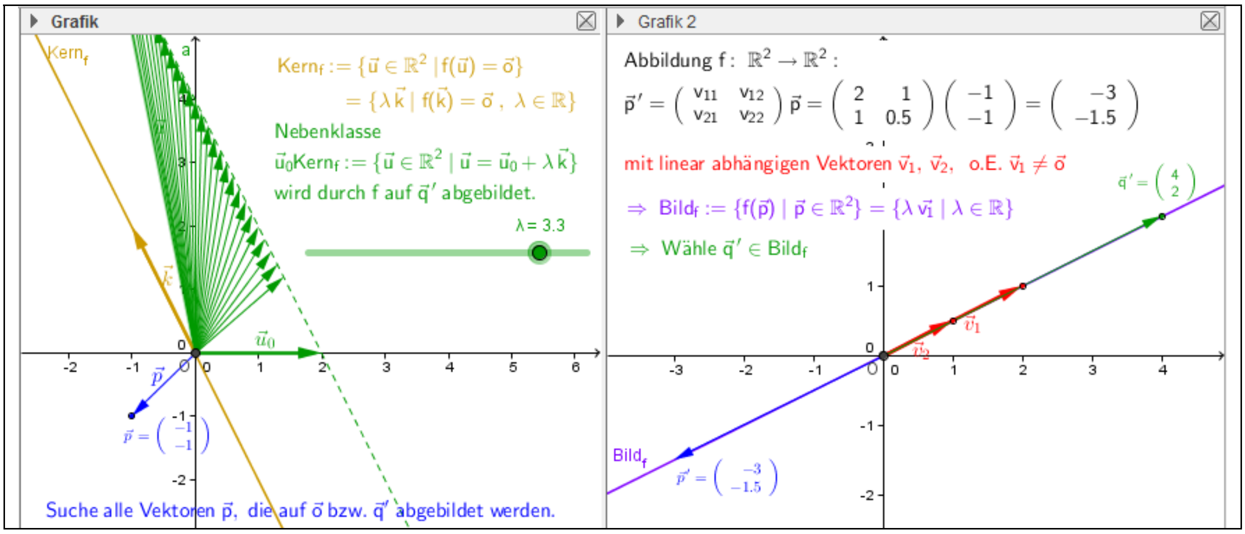
Der Fall, dass $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ linear abhängig sind, führt auf zahlreiche Begriffe der Linearen Algebra, so das **Bild des Vektorraumes (IR²,+,·) mittels der linearen Abbildung f**, das für $\vec{v}_1 \neq \vec{o}$ ein eindimensionaler **Untervektorraum** (dargestellt in Grafik 2) ist, siehe **Linearkombination-Zusatz.ggb** und betrachte die Bilder von $\vec{p}$ .

Die Frage nach allen Vektoren $\vec{p}$ , die auf den Nullvektor $\vec{o}$ abgebildet werden, liefert einen eindimensionalen Untervektorraum im Ausgangsraum, den sogenannten **Kern von f**.

Da $x(v_1)$ und $x(v_2)$ Null sein können, benötigt die Bestimmung eines Vektors $\vec{k} \neq \vec{o}$ des Kerns eine Fallunterscheidung. **Vektor[Wenn[ |x(v_1)| > |y(v_1)|, (-x(v_2), x(v_1)), (-y(v_2), y(v_1))]]** liefert offenbar stets einen solchen Vektor für das **Urbild des Nullvektors**.

Die Frage nach allen Vektoren $\vec{p}$ , die auf den Vektor $\vec{q}\,' \in Bild_f$ abgebildet werden, liefert eine **Nebenklasse des Kerns**, die ein Element der sogenannten **Faktorgruppe** ist.

Auch bei der Bestimmung eines Vektors $\vec{u}_0$ dieser Nebenklasse ist eine Fallunterscheidung nötig. **Vektor[(Wenn[ |x(v_1)| > |y(v_1)|, x(q') / x(v_1), y(q') / y(v_1)], 0 )]** liefert offenbar stets einen solchen Vektor mit $f(\vec{u}_0) = \vec{q}\,'$ und damit die Nebenklasse als $\{\vec{u} \in R^2 | \vec{u} = \vec{u}_0 + \lambda\vec{k}\}$ .




Offenbar gilt auch der **Dimensionssatz: dim(Kern$_f$) + dim(Bild$_f$) = dim(IR²)** des Ausgangsraumes. Für $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{o}$ ist f die Nullabbildung und es gilt: Bild$_f$ = $\{\vec{o}\,\}$ und Kern$_f$ = IR².