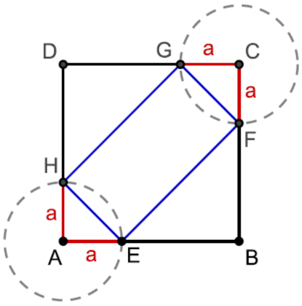
WS 13/14 Geometrie LB Klausur

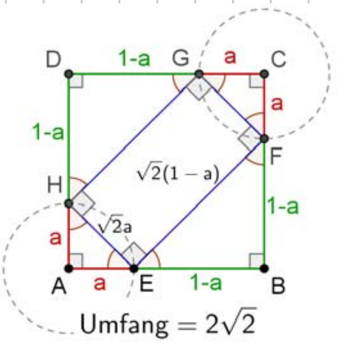
Notiztitel 11.02.2013

Aufgabe 1 (ca. 5 Punkte)

In der euklidischen Ebene sei ein Quadrat $ABCD$ mit Seitenlänge $|\overline{AB}| = 1$ gegeben. Trägt man von den Ecken A und C aus gleiche Strecken der Länge a mit $0 < a < 1$ auf den Seiten ab, so erhält man die Ecken E, F, G, H eines Vierecks, vgl. Skizze.



Zeigen Sie mit bekannten elementaren Aussagen für Dreiecke, dass das Viereck $EFGH$ ein Rechteck mit dem Umfang $2\sqrt{2}$ ist.



1) Alle Dreiecke sind gleichschenklig und rechtwinklig $\overset{\text{W.S.}}{\underset{\text{Symm.}}{\Rightarrow}}$ Basiswinkel 45° (2)

$\Rightarrow$ EFGH ist ein Rechteck. (1)

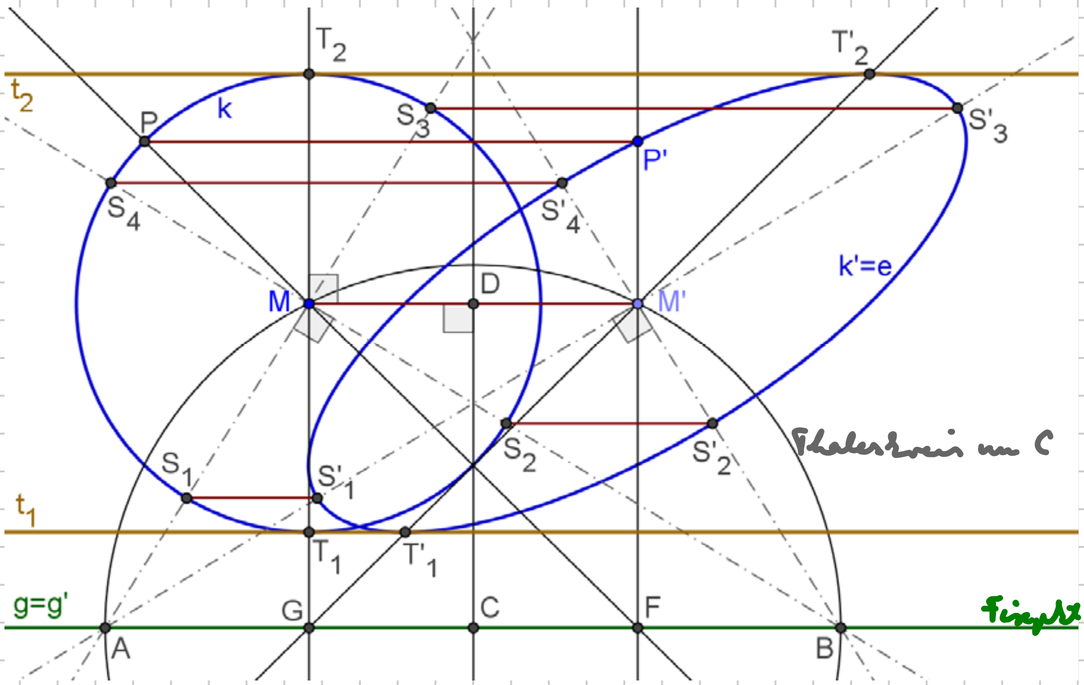
2) Pyth. $|EH| = |FG| = \sqrt{2}\,a$, $|EF| = |GH| = \sqrt{2}(1-a)$ (1)

$\Rightarrow$ Umfang $= 2a\sqrt{2} + 2(1-a)\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (1)

Alternativ mit Diagonalen AC, BD und zentrischer Streckung

Aufgabe 2 (ca. 6 Punkte)

In der projektiv abgeschlossenen euklidischen Ebene $\mathbf{P}^2$ sei eine ebene perspektive Affinität durch Vorgabe ihrer Fixpunktgerade g und eines Punkt-Bildpunktpaars (M, M') gegeben. Ferner sei k der Kreis um M, dessen Bild eine Ellipse um M' ist und den Punkt P' enthält.



Thaleskreis um C

Fixpunktgerade

PP' ∥ MM' Fixrichtung

gem. Tgten ∥ MM' Fixrichtung

Konstruieren Sie

a) das Urbild P von P' und damit den Kreis k um M, 1

b) das Paar orthogonaler Geraden durch M, das auf ein Paar orthogonaler Geraden durch M' abgebildet wird, 2

c) die Scheitel $S'_1, ..., S'_4$ von k' und skizzieren Sie die Ellipse $e = k'$,
Hinweis: Zum Skizzieren von $e = k'$ können Sie auch weitere Punkte verwenden. 2

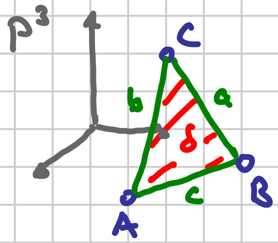
d) die gemeinsamen Tangenten von k und k'. 1

Hinweis: Es genügt die Konstruktion der gesuchten Objekte,
eine ausführliche Konstruktionsbeschreibung ist **nicht** erforderlich!

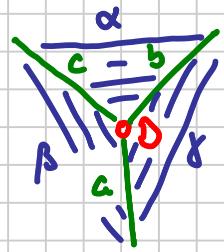
Aufgabe 3 (ca. 4 Punkte)

Im dreidimensionalen projektiven Raum $\mathbf{P}^3$ sei in einer Ebene δ ein Dreieck ΔABC mit den Eckpunkten A, B, C und den Seiten $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ gegeben.

Dualisieren Sie diese Figur im $\mathbf{P}^3$ und skizzieren Sie die zugehörige Figur.



dual $\longleftrightarrow$ zu



1

Ebene δ — Punkt D 1

Geraden a, b, c in Ebene δ (nicht kopunktal) dual zu Geraden a, b, c durch Punkt D (nicht komplanar) 1

Schnitt-Punkten A, B, C von a, b, c — Verbindungs-Ebenen α, β, γ von a, b, c 1

Aufgabe 4 (ca. 7 Punkte)

In der projektiv erweiterten euklidischen Ebene $\mathbf{P}^2$ sei der Kegelschnitt $k: \ \vec{x}^T A \vec{x} = 0$

mit $A = A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ in homogenen Koordinaten gegeben.

Bestimmen Sie:

a) den Schnitt A von k mit der Ferngeraden $x_0 = 0$,

b) die Polare q zum Punkt $Q(0, a, 1)$ bezüglich k mit $a \neq 0$,

c) den Schnitt $B \neq A$ von q mit k und geben Sie die Tangente t von k im Punkt B an,

d) die Gleichung von k im xy-Koordinatensystem. Was für ein Kegelschnitt ist k?

$\vec{x}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = -2x_0x_2 + x_1^2 = 0$ in homog. Koord. $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

einsetzen

a) Schnitt A von k mit $\underline{x_0 = 0}$ $\Rightarrow x_1^2 = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 0}$ $A(0,0,1)$ $x_2 \neq 0$ 1

b) Polare q zu $Q(0,a,1)$: $\vec{q}^T A \vec{x} = (x_0\ x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = a x_1 - x_0 = 0$ 1

c) Schnitt $B \neq A$ $\quad K: \; x_1^2 - 2x_0x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1(x_1 - 2a x_2) = 0 \Rightarrow$

$q: \; a x_1 - x_0 = 0 \Rightarrow \underline{x_0 = a x_1}$

$\Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1 = 0} \\ \text{oder} \\ \underline{x_1 = 2a x_2} \end{cases} \begin{array}{l} \Rightarrow A(0\,0\,1) \\ \\ \Rightarrow B(2a^2, 2a, 1) \end{array}$ (quad. Gl. ggf. mit MNF nach x_1 auflösen) 2

o.E. $x_2 = 1$

ohne Rechnung: $B \in K \cap q \Rightarrow t$ ist Polare zu B und Q polar zu $B \Rightarrow$ 1

Tangente t in B ist Gerade BQ: $\vec{y} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2a^2 \\ 2a \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$;

oder $(2a^2, 2a, 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_0 + 2a x_1 - 2a^2 x_2 = 0$ nicht verlangt!

d) $x = \frac{x_1}{x_0}, \; y = \frac{x_2}{x_0} \Rightarrow 0 = -2\frac{x_2}{x_0} + \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 = -2y + x^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2$ 1

Dies ist eine Parabel. (War schon nach a) klar, 1 Fernpkt) 1

Aufgabe 5 (ca. 9 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sei eine C^∞–Kurve c gegeben durch die Parameterdarstellung:

$$c: \; \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3\,\cos t \\ 5\,\sin t \\ 4\,\cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi[.$$

a) Zeigen Sie, dass c regulär und einfach ist.

b) Berechnen Sie die Länge s der Kurve c.

c) Zeigen Sie, dass die Krümmung $\kappa(t)$ von c konstant und die Torsion $\tau(t)$ von c Null ist.

d) Geben Sie die Evolute von c an. Was für eine Kurve ist c?

a) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 5\sin t \\ 4\cos t \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -3\sin t \\ 5\cos t \\ -4\sin t \end{pmatrix}, \; \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -3\cos t \\ -5\sin t \\ -4\cos t \end{pmatrix}, \; \dddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 3\sin t \\ -5\cos t \\ 4\sin t \end{pmatrix} = -\dot{\vec{x}}(t)$

<u>c regulär</u>: <u>1. Weg</u>: $\dot{\vec{x}}(t) \neq \vec{0}$ da sin und cos keine gem. Nullst.

<u>2. Weg</u>: $(\dot{\vec{x}}(t))^2 = 9\sin^2 t + 25\cos^2 t + 16\sin^2 t = 25(\cos^2 t + \sin^2 t) = 25 \neq 0$ 1

<u>c einfach</u>: Da für $t_1, t_2 \in [0, 2\pi[$ aus $\begin{array}{l} \cos t_1 = \cos t_2 \\ \sin t_1 = \sin t_2 \end{array}$ folgt $t_1 = t_2$ 1

b) $s = \int_0^{2\pi} |\dot{\vec{x}}(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} 5\, dt = 5t\Big|_0^{2\pi} = \underline{10\pi}$ $\left(s = s(t) = 5t \Rightarrow t = t(s) = \frac{s}{5}\right)$ 1

c) $\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -20\cos^2 t - 20\sin^2 t \\ 12\sin t\cos t - 12\sin t\cos t \\ 15\sin^2 t + 15\cos^2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\det(\dot{\vec{x}}\, \ddot{\vec{x}}\, \underbrace{\dddot{\vec{x}}}_{= -\dot{\vec{x}}}) = 0$

$\Rightarrow \kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3} = \frac{5 \cdot \sqrt{16+9}}{5^3} = \underline{\frac{1}{5}}$ und $\tau(t) = \frac{\det(\dot{\vec{x}}\, \ddot{\vec{x}}\, \dddot{\vec{x}})}{(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2} = 0$ 2 2

d) $\Rightarrow$ c ist Kreis (in Ebene $-4x + 3z = -12\cos t + 12\cos t = 0$)

um Mittelpunkt $M = \frac{1}{2}(\vec{x}(0) + \vec{x}(\pi)) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Evolute 2

parallele Tgten $\dot{\vec{x}}(0) = -\dot{\vec{x}}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Alternativ. Bestimme Kr.kr. Mittelpkt z.B. an der Stelle $t=0$

$$\vec{m}(0) = \vec{x}(0) + \frac{1}{\kappa(0)} \cdot \vec{n}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 5 \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

NR $\vec{t}(0) = \frac{\dot{\vec{x}}(0)}{|\dot{\vec{x}}(0)|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(0) = \frac{\dot{\vec{x}}(0) \times \ddot{\vec{x}}(0)}{|\dot{\vec{x}}(0) \times \ddot{\vec{x}}(0)|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}(0) = \vec{b}(0) \times \vec{t}(0) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

FRENET-Dreibein von c an der Stelle $t=0$.

Aufgabe 6 (ca. 9 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sei eine C^∞–Fläche Φ gegeben durch die Parameterdarstellung:

$$\Phi: \ \vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u^3 \cos v \\ u^3 \sin v \\ 3u \end{pmatrix}, \quad u > 0, \ v \in [-\pi, \pi].$$

a) Zeigen Sie, dass $g = 9u^6(u^4+1)$ die Determinante der metrischen Fundamentalgrößen von Φ ist.

b) Bestimmen Sie die Oberfläche O desjenigen Flächenstücks von Φ, das unterhalb der Ebene $\delta: \ z = 3$ liegt. ***Hinweis:*** Verwenden Sie die Substitution $w = u^4 + 1$.

c) Durch die Funktion $v(t)$ sei eine Flächenkurve $c: \ \vec{y}(t) := \vec{x}(t, v(t))$ von Φ gegeben. Bestimmen Sie $v(t)$ "bis auf Quadratur" so, dass die Tangenten von c mit der z-Achse stets den Winkel 45° einschließen, d.h. c eine Böschungslinie von Φ ist.
Hinweis: Es genügt die Angabe von $\dot{v}(t)$.

a) $\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u^3 \cos v \\ u^3 \sin v \\ 3u \end{pmatrix}, u > 0, v \in [-\pi, \pi[; \quad \vec{x}_u = \begin{pmatrix} 3u^2 \cos v \\ 3u^2 \sin v \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{x}_v = \begin{pmatrix} -u^3 \sin v \\ u^3 \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$ 1

$\Rightarrow g_{11} = \vec{x}_u^{\,2} = 9u^4 + 9; \quad g_{12} = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = 0; \quad g_{22} = \vec{x}_v^{\,2} = u^6$

$\Rightarrow g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = 9u^6(u^4+1)$ 2

b) $z \leq 3 \Rightarrow 0 < u \leq 1$

$\Rightarrow O = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{g}\, dv\, du = 2\pi \int_0^1 3u^3 \sqrt{u^4+1}\, du = \frac{3}{2}\pi \int_1^2 \sqrt{w}\, dw = \pi \cdot \sqrt{w}^3 \Big|_1^2 =$

subst. $w = u^4 + 1$
$dw = 4u^3 du$

$= \pi(2\sqrt{2} - 1)$ 3

c) $\vec{y}(t) = \vec{x}(t, v(t)) \Rightarrow \dot{\vec{y}}(t) = \vec{x}_u \cdot 1 + \vec{x}_v \cdot \dot{v}(t) \Rightarrow (\dot{\vec{y}}(t))^2 = g_{11} + g_{22}\dot{v}^2$

<u>Ansatz:</u> $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\dot{\vec{y}}(t)}{|\dot{\vec{y}}(t)|} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{g_{11} + g_{22} \cdot \dot{v}^2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g_{11} + g_{22}\dot{v}^2 = 18 \Leftrightarrow \dot{v}^2 = \frac{18 - g_{11}}{g_{22}} = \frac{9(1-t^4)}{t^6} \Rightarrow \underline{\dot{v} = \pm \frac{3}{t^3}\sqrt{1-t^4}}$ 3