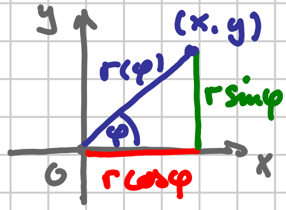
Geometrie LB Blatt 11 Hausaufgaben

Notiztitel 16.12.2014

H25. Polarkoord. $r(\varphi)=ae^{b\varphi}$, $a,b>0$

$$\Rightarrow \vec{x}(\varphi)=\begin{pmatrix}x(\varphi)\\ y(\varphi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r(\varphi)\cos\varphi\\ r(\varphi)\sin\varphi\end{pmatrix}=ae^{b\varphi}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$$



a) $$\Rightarrow \dot{\vec{x}}(\varphi)=\underline{abe^{b\varphi}}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}+\underline{ae^{b\varphi}}\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}=\underline{ae^{b\varphi}}\begin{pmatrix}b\cos\varphi-\sin\varphi\\ b\sin\varphi+\cos\varphi\end{pmatrix}$$

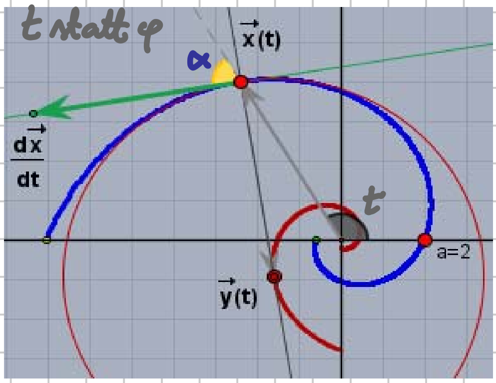
$$(\dot{\vec{x}}(\varphi))^2=a^2e^{2b\varphi}\cdot(b^2+1)\Rightarrow$$

$$s(\varphi)=\int_0^{\varphi}|\dot{\vec{x}}(u)|\,du=\int_0^{\varphi}ae^{bu}\sqrt{b^2+1}\,du$$

$$=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+1}\cdot(e^{b\varphi}-1),\ \varphi\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{\varphi\to-\infty}s(\varphi)=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+1}\lim_{\varphi\to-\infty}(e^{b\varphi}-1)=$$

$$=-\frac{a}{b}\sqrt{b^2+1}\quad \text{(endlich!)}$$



b) Gerade durch 0 und $\vec{x}(\varphi)$: $\vec{y}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{\dot{\vec{x}}(\varphi)}{|\dot{\vec{x}}(\varphi)|}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}\cdot\begin{pmatrix}b\cos\varphi-\sin\varphi\\ b\sin\varphi+\cos\varphi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}=\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}=\underline{\text{const}}$$

c) $$\ddot{\vec{x}}(\varphi)=\underline{abe^{b\varphi}}\begin{pmatrix}b\cos\varphi-\sin\varphi\\ b\sin\varphi+\cos\varphi\end{pmatrix}+\underline{ae^{b\varphi}}\begin{pmatrix}-b\sin\varphi-\cos\varphi\\ b\cos\varphi-\sin\varphi\end{pmatrix}=$$

$$=\underline{ae^{b\varphi}}\begin{pmatrix}(b^2-1)\cos\varphi-2b\sin\varphi\\ (b^2-1)\sin\varphi+2b\cos\varphi\end{pmatrix}$$

im Kopf!

$$\det(\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}})=a^2e^{2b\varphi}\det\begin{pmatrix}b\cos\varphi-\sin\varphi & (b^2-1)\cos\varphi-2b\sin\varphi\\ b\sin\varphi+\cos\varphi & (b^2-1)\sin\varphi+2b\cos\varphi\end{pmatrix}=\cdots=$$

$$=a^2e^{2b\varphi}(2b^2-(b^2-1))=a^2e^{2b\varphi}(b^2+1)$$

$$\Rightarrow \kappa(\varphi)=\frac{\det(\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}})}{|\dot{\vec{x}}|^3}=\frac{a^2e^{2b\varphi}(b^2+1)}{a^3e^{3b\varphi}(b^2+1)^{3/2}}=\frac{1}{ae^{b\varphi}\sqrt{b^2+1}}=\frac{1}{|\dot{\vec{x}}(\varphi)|}\quad(*)$$

$$\Rightarrow \text{Evolute } \vec{y}(\varphi)=\vec{x}(\varphi)+\frac{1}{\kappa(\varphi)}\vec{n}(\varphi)\quad \text{mit } \vec{n}(\varphi)\perp\vec{t}(\varphi)=\frac{\dot{\vec{x}}(\varphi)}{|\dot{\vec{x}}(\varphi)|}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}(\varphi)=\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}\quad (\vec{t},\vec{n}\text{ rechts ONB})$$

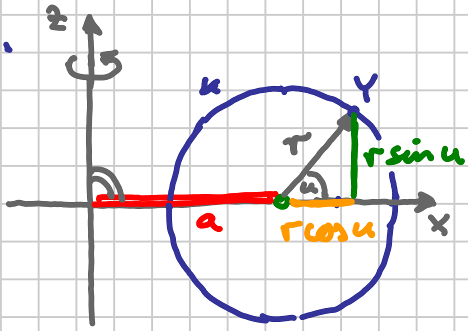
$$\Rightarrow \vec{y}(\varphi) = a e^{b\varphi}\begin{pmatrix}\cancel{\cos\varphi}\\ \cancel{\sin\varphi}\end{pmatrix} + \underbrace{\frac{1}{\kappa(\varphi)}\cdot\frac{1}{|\dot{\vec{x}}(\varphi)|}}_{=1 \text{ nach } (*)}\cdot a e^{b\varphi}\begin{pmatrix}-b\sin\varphi - \cancel{\cos\varphi}\\ b\cos\varphi - \cancel{\sin\varphi}\end{pmatrix} =$$

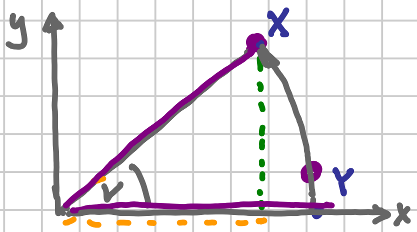
$$= abe^{b\varphi}\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix} = bae^{b\varphi}\begin{pmatrix}\cos(\varphi+\frac{\pi}{2})\\ \sin(\varphi+\frac{\pi}{2})\end{pmatrix} = b\cdot\vec{x}(\varphi+\tfrac{\pi}{2})$$

$\Rightarrow$ Die Evolute ist die um $\frac{\pi}{2}$ gedrehte und mit dem Faktor b aus $O=(0,0)$ zentrisch gestreckte Kurve c !

Anmerkung: Für $b \approx 0.27441$ fällt die Evolute von c mit c sogar zusammen.

H26.





a) o.E. Kreis um $M=(a,0,0)$ in xy-Ebene mit Radius r (Meridian).

$$\vec{y}(u) = \begin{pmatrix}a + r\cos u\\ 0\\ r\sin u\end{pmatrix}, \quad u\in[-\pi,\pi[$$

Drehung um z Achse mit Winkel v

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}\cos v & -\sin v & 0\\ \sin v & \cos v & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\vec{y} \Rightarrow$$

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix}\cos v & -\sin v & 0\\ \sin v & \cos v & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a + r\cos u\\ 0\\ r\sin u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(a+r\cos u)\cdot\cos v\\ (a+r\cos u)\cdot\sin v\\ r\sin u\end{pmatrix}, \quad \begin{matrix}u\in[-\pi,\pi[\\ v\in[-\pi,\pi[\end{matrix}$$

$G = \{(u,v) \mid -\pi\le u<\pi,\ -\pi\le v<\pi\}$ Parameterlinien:

u-Linien ($v=v_0=\text{const}$): $\vec{x}(u,v_0) = \begin{pmatrix}(a+r\cos u)\cos v_0\\ (a+r\cos u)\sin v_0\\ r\sin u\end{pmatrix}$

mit Winkel v_0 um z-Achse gedrehter Meridiankreis

v-Linien ($u=u_0=\text{const}$): $\vec{x}(u_0,v) = \begin{pmatrix}(a+r\cos u_0)\cos v\\ (a+r\cos u_0)\sin v\\ r\sin u_0\end{pmatrix}$

Kreis in Ebene $z=r\sin u_0$ um z-Achse mit Radius $a+r\cos u_0$

b) $\vec{x}_u = \begin{pmatrix}-r\sin u\cos v\\ -r\sin u\sin v\\ r\cos u\end{pmatrix}$, $\vec{x}_v = \begin{pmatrix}-(a+r\cos u)\sin v\\ (a+r\cos u)\cos v\\ 0\end{pmatrix}$

Tgte an u-Linie   Tgte an v-Linie durch $\vec{x}(u,v)$.

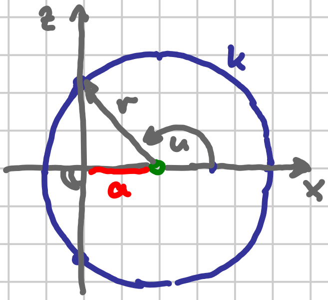
$\vec{x}(u,v)$ regulär $\Leftrightarrow \vec{x}_u, \vec{x}_v$ linear unabhängig

$$\Leftrightarrow \vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{x}_u \times \vec{x}_v)^2 \neq 0$$

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \underbrace{r}_{>0}(a+r\cos u)\underbrace{\begin{pmatrix} -\cos u \cos v \\ -\cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix}}_{\neq \vec{0} \text{ da für } \sin u = 0 \Rightarrow \cos u = \pm 1} \neq \vec{0} \Leftrightarrow a + r\underbrace{\cos u}_{\in[-1,1]} \neq 0 \ \forall u$$

gilt stets falls $\underline{a>r}$

c)



Für $a<r$ schneidet k die z-Achse in 2 Punkten mit $\cos u = -\frac{a}{r}$ (vgl. reguläre Stellen) die bei Drehung um z-Achse liegen bleiben, d.h. Doppelpunkte (und singuläre Pkt) von c sind.

Alle anderen Pkte sind für $G = [-\pi,\pi) \times [-\pi,\pi)$ einfach.

d) $g_{11} = \vec{x}_u^{\,2} = r^2$, $g_{12} = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = 0$, $g_{22} = \vec{x}_v^{\,2} = (a+r\cos u)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow g = \det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = (\vec{x}_u \times \vec{x}_v)^2 = r^2(\underbrace{a+r\cos u}_{>0})^2 \neq 0 \text{ für } a>r$$

$$A(\Phi) = \iint_{\mathcal{U}} |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| \, du\, dv = \iint_{\mathcal{U}} \sqrt{\det(g_{ij})}\, du\, dv =$$

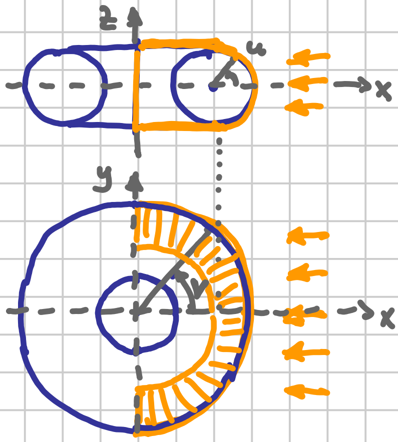
$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r(a+r\cos u)\, du\, dv = r\int_{-\pi}^{\pi} (au + r\sin u)\Big|_{u=-\pi}^{\pi} dv =$$

$$= r\int_{-\pi}^{\pi} 2a\pi \, dv = r \cdot 2 \ \pi v \Big|_{v=-\pi}^{\pi} = \underline{4ar\pi^2}$$

beachte $a>r$

(Oberfläche des „Apfeltorus" mit Grenzen von u von $-\arccos(-\frac{a}{r})$ bis $\arccos(-\frac{a}{r})$.)

Bei Beleuchtung parallel zur x-Achse wird nur der Teil von Φ mit $(u,v) \in \underbrace{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}_{u} \times \underbrace{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}_{v}$ beleuchtet.



$$\Rightarrow A(\bar{\Phi}) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r(a+r\cos u)\, dv\, du =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \pi r(a+r\cos u)\, du =$$

$$= \pi r \cdot (au + r\sin u)\Big|_{u=-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \pi r \cdot (a\pi + 2r) =$$

$$= \underline{\underline{ra\pi^2 + 2r^2\pi}}$$