3 Einführung von Koordinaten

3.1 Affine Koordinaten

3.1.1 Affines Koordinatensystem im Raum

Figur 3-1-1-affinesKS

Im dreidimensionalen euklidischen Anschauungsraum $\mathbb{E}^3$ wählen wir einen Punkt O, den **Koordinatenursprung** und drei Geraden durch O, die nicht in einer Ebene liegen, die x-, die y- und die z-**Achse**.

Die Geraden brauchen nicht paarweise zueinander orthogonal zu sein, in der affinen Geometrie gibt es noch keine Metrik.

Auf der x-Achse wählen wir einen Punkt $E_x \neq O$ als **Einheitspunkt**
usw.

Dabei ist im allgemeinen
$d(E_x, O) \neq d(E_y, O) \neq d(E_z, O) \neq d(E_x, O)$.

Die x- und die y-Achse spannen die xy-**Ebene** auf usw.

Ist P ein Punkt im $\mathbb{E}^3$, so schneiden die Parallelen durch P zur
z-Achse die xy-Ebene im Punkt P',
x-Achse die yz-Ebene im Punkt P'' und
y-Achse die xz-Ebene im Punkt P'''.

Die Parallele zur y-Achse durch P' schneidet die x-Achse im Punkt P_x,
die Parallele zur x-Achse durch P' schneidet die y-Achse im Punkt P_y und
die Parallelebene zur xy-Ebene durch P schneidet die z-Achse im Punkt P_z.

Man erhält so einen Spat/Parallelepiped.

Das Teilverhältnis

$$TV(P_x E_x O) = \frac{d(P_x, O)}{d(E_x, O)} \cdot \varepsilon_x$$

mit $\varepsilon_x = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right\}$, falls O $\left\{ \begin{array}{c} \text{nicht} \\ \ \end{array} \right\}$ zwischen E_x und P_x liegt. (siehe 2.2.5) heißt x-**Koordinate** p_x von P bezüglich des **affinen** xyz-**Koordinatensystems**.

Analog: p_y, p_z.

Für den Punkt P gilt dann:

$$\overrightarrow{OP} = p_x \cdot \overrightarrow{OE_x} + p_y \cdot \overrightarrow{OE_y} + p_z \cdot \overrightarrow{OE_z}$$

Kurzschreibweise: $P(p_x, p_y, p_z)$: Der Punkt P hat die **affinen Koordinaten** p_x, p_y, p_z.

P hat bezüglich dieses xyz-**Koordinatensystems** (xyz-**KS**) den **Koordinatenvektor** $\vec{p} := \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$.

3.1.2 Wechsel von affinen KSen bei gleichem Ursprung

Figur-3-1-2-Koordinatenwechsel (im $\mathbb{E}^2$)

NR im $\mathbb{E}^2$: Basiswechsel $\begin{array}{l} \vec{e'}_x = a_{11}\vec{e}_x + a_{21}\vec{e}_y \\ \vec{e'}_y = a_{12}\vec{e}_x + a_{22}\vec{e}_y \end{array}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= p_x\vec{e}_x + p_y\vec{e}_y = p'_x\vec{e'}_x + p'_y\vec{e'}_y \\ &= p'_x(a_{11}\vec{e}_x + a_{21}\vec{e}_y) + p'_y(a_{12}\vec{e}_x + a_{22}\vec{e}_y) \\ &= (a_{11}p'_x + a_{12}p'_y)\vec{e}_x + (a_{21}p'_x + a_{22}p'_y)\vec{e}_y \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert: $\begin{array}{l} p_x = a_{11}p'_x + a_{12}p'_y \\ p_y = a_{21}p'_x + a_{22}p'_y \end{array}$ also

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \end{pmatrix} = A\vec{p'}$$

Seien im $\mathbb{E}^3$ ein xyz-KS und ein $x'y'z'$-KS gegeben (zunächst) mit demselben Ursprung O.

Für einen Punkt P gilt dann:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= p_x \cdot \overrightarrow{OE_x} + p_y \cdot \overrightarrow{OE_y} + p_z \cdot \overrightarrow{OE_z} = \\ &= p'_x \cdot \overrightarrow{OE'_x} + p'_y \cdot \overrightarrow{OE'_y} + p'_z \cdot \overrightarrow{OE'_z} \end{aligned}$$

Sei nun

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OE'_x} &= a_{11}\overrightarrow{OE_x} + a_{21}\overrightarrow{OE_y} + a_{31}\overrightarrow{OE_z} \\
\overrightarrow{OE'_y} &= a_{12}\overrightarrow{OE_x} + a_{22}\overrightarrow{OE_y} + a_{32}\overrightarrow{OE_z} \qquad (*) \\
\overrightarrow{OE'_z} &= a_{13}\overrightarrow{OE_x} + a_{23}\overrightarrow{OE_y} + a_{33}\overrightarrow{OE_z}
\end{aligned}$$

Dann ergibt sich nach Einsetzen

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} = &(p'_x a_{11} + p'_y a_{12} + p'_z a_{13}) \cdot \overrightarrow{OE_x} + \\
&+ (p'_x a_{21} + p'_y a_{22} + p'_z a_{23}) \cdot \overrightarrow{OE_y} + \\
&+ (p'_x a_{31} + p'_y a_{32} + p'_z a_{33}) \cdot \overrightarrow{OE_z}
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned}
p_x &= a_{11}p'_x + a_{12}p'_y + a_{13}p'_z \\
p_y &= a_{21}p'_x + a_{22}p'_y + a_{23}p'_z \qquad (**) \\
p_z &= a_{31}p'_x + a_{32}p'_y + a_{33}p'_z
\end{aligned}$$

Vergleich (*) mit (**):

(*) . . . **Basistransformation**
(**)...**Koordinatentransformation**(**KT**)
In (*) stehen die gestrichenen Größen links, in (**) rechts.
In (*) wird über den Index i bei a_{ik} summiert, in (**) über k.

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} \qquad (**)$$

kurz: $\vec{p} = A \cdot \vec{p}\,'$ bzw. $\vec{p'} = A^{-1}\vec{p}$ falls $\det(A) \neq 0$ (bijektive lineare Abbildung)

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{OE'_x} \\ \overrightarrow{OE'_y} \\ \overrightarrow{OE'_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{OE_x} \\ \overrightarrow{OE_y} \\ \overrightarrow{OE_z} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

In (*) steht A^T, wo in (**) A steht.

(*) und (**) nennt man **zueinander kontragredient**.

3.1.3 Wechsel von affinen KSen bei nicht notwendig gleichem Ursprung

Seien nun
ein affines xyz-KS und
ein affines $x'y'z'$-KS gegeben
mit Ursprung O bzw. O'.

Dann ist $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$,

also $\vec{p} = \vec{b} + A\vec{p}\,'$.

3.2 **Kartesisches KS** (Zur Erinnerung)

Ein affines xyz-KS im dreidimensionalen euklidischen Raum heißt ein **kartesisches KS** nach **Renatus (René) Cartesius**

(1596 - 1650) (Cogito, ergo sum. Ich denke, also bin ich.)

wenn gilt:

Die x-, die y- und die z-Achse sind paarweise zueinander orthogonal und

die drei Streckenlängen $d(O, E_x)$, $d(O, E_y)$ und $d(O, E_z)$ sind gleich lang.

Sind die drei Vektoren $\overrightarrow{OE_x}$, $\overrightarrow{OE_y}$ und $\overrightarrow{OE_z}$ (in dieser Reihenfolge) angeordnet wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand, so heißt das KS ein **Rechts-KS**, andernfalls ein **Links-KS**.

Durch Spiegelung an einer Ebene (z.B. der yz-Ebene) geht ein Rechts-KS in ein Links-KS über. Insofern ist die Wahl des Rechts-KS **geometrisch willkürlich**.

Beachte **Rechte-Hand-Regel:** Zeigt der Daumen in Richtung der Drehachse, so liefert das Abwinkeln der anderen Finger eine positive Drehung (Rechtsdrehung).

Physikalisch: Elektronen, die aus einem β-Zerfall stammen, sind immer links-zirkular polarisiert. (Lee, Yang und Wu)

Pharmazie: Bei der Herstellung von Contergan entstanden spiegelbildliche Moleküle (rechts- bzw. linksdrehend). Die einen waren unschädlich, die anderen fatalerweise nicht.

Ein affines xy-KS im zweidimensionalen euklidischen Raum (euklidische Ebene) heißt ein **kartesisches KS**, wenn gilt:
Die x- und die y- Achse sind zueinander orthogonal und
die zwei Streckenlängen $d(O, E_x)$, $d(O, E_y)$ sind gleich lang.
Geht der Vektor $\overrightarrow{OE_y}$ aus $\overrightarrow{OE_x}$ durch eine Drehung auf kürzestem Wege im mathematisch positiven Sinne hervor, so heißt das KS ein **Rechts-KS**,
andernfalls ein **Links-KS**.

Schaut man auf eine Ebene mit einem xy-KS, das ein Rechtssystem ist, von der anderen Seite, so wird das Rechtssystem zu einem Linkssystem.

Eine Drehung des Raumes um eine Achse erfolgt mit positivem Drehwinkel, wenn sie eine Rechtsdrehung ist.

Eine Drehung der Ebene um einen Punkt erfolgt mit positivem Drehwinkel, wenn sie eine Linksdrehung ist.

Warum?

Liegt ein Blatt Papier mit einem kartesischen xy-Rechts-KS auf einem Zeichentisch, so zeigt die zugehörige z-Achse nach oben.

Die Blickrichtung des Betrachters ist der z-Achse entgegengerichtet.

Was der Betrachter als Linksdrehung sieht, ist eine Rechtsdrehung um die orientierte z-Achse.

3.3 Homogene Koordinaten

Kann man Fernpunkten Koordinaten zuordnen?
z.B. $(u \cdot \infty, v \cdot \infty) = (\infty, \infty)$ (im allgem.)
Das ist offenbar nicht sinnvoll!

3.3.1 Einführung homogener Koordinaten in der projektiven Ebene P^2

Figur-3-3-1-HomogeneKoordinaten

Wir betrachten die projektiv erweiterte euklidische Ebene P^2 als Ebene $x_0 = 1$ in einem $x_0 x_1 x_2$-Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ und ordnen dem Punkt $P(1, p_x, p_y)$ (p_x, p_y **affine Koordinaten von P** im P^2) die **homogenen Koordinaten**

$$\vec{p} = \rho \begin{pmatrix} 1 \\ p_x \\ p_y \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit dem}$$

homogenisierenden Faktor $\rho \neq 0$ zu.

d.h. im $\mathbb{R}^3$ die Punkte der Geraden $OP \backslash \{O\}$.

Aus den homogenen Koordinaten von P $\vec{p} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{o}\}$ (warum $\neq \vec{o}$?) erhält man für $p_0 \neq 0$ dessen affinen Koordinaten als

$$p_x = \frac{p_1}{p_0},\ p_y = \frac{p_2}{p_0}$$

.

bzw. konstruktiv im $\mathbb{R}^3$ als Schnitt der Geraden durch O mit Richtung $\vec{p}$ mit der Ebene $x_0 = 1$. Für $p_0 = 0$ liegt diese Gerade parallel zur Ebene $x_0 = 1$, schneidet also diese Ebene projektiv gesehen im Fernpunkt der Richtung $\vec{p}$.

Liegt im Fall $p_0 = 0$ ein Fernpunkt vor?

Wir betrachten in $x_0 = 1$ die Gerade $g : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{r}, \quad (t \in \mathbb{R})$ mit Aufpunkt $P(1, p_x, p_y)$ und Richtung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ r_x \\ r_y \end{pmatrix}$ in homogenen Koordinaten

$$g : \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \rho\,(\vec{p} + t \cdot \vec{r}) = \rho \begin{pmatrix} 1 \\ p_x + t \cdot r_x \\ p_y + t \cdot r_y \end{pmatrix},$$

wählen o.E. den homog. Faktor $\rho = 1/t$ und erhalten für $t \to \infty$

$$\lim_{t \to \infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ \frac{p_x}{t} + r_x \\ \frac{p_y}{t} + r_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r_x \\ r_y \end{pmatrix}$$

die homogenen Koordinaten des Fernpunkts von g, unabhängig von der Wahl des Aufpunkts P, d.h. alle zur Richtung $\vec{r}$ parallelen Geraden schneiden einander im Fernpunkt R mit den homogenen Koordinaten $\vec{r}$ mit $r_0 = 0$. Damit ist (pA) erfüllt.

Einschub: "Homogene Koordinaten" kennen wir schon:

Einer Geraden in der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit der Gleichung $a \cdot x + b \cdot y + d = 0$ kann man die **Geradenkoordinaten** (a, b, d) zuordnen.

Da die Multiplikation einer Gleichung mit $\rho \neq 0$ die Lösungsmenge nicht ändert, stellen die Geradenkoordinaten $(\rho \cdot a, \rho \cdot b, \rho \cdot d)$ mit $\rho \neq 0$ dieselbe Gerade dar.

Eine **geometrische Deutung** obiger Figur liefert ein weiteres **Modell für eine projektiv abgeschlossene euklidische Ebene** P^2

in P^2	im Modell (im $\mathbb{R}^3$)
Punkt	Gerade durch $O(0,0,0)$
Fernpunkt	Gerade durch O in der Ebene $x_0 = 0$
eigentlicher Punkt	sonstige Gerade durch O
Gerade	Ebene durch O
Ferngerade	Ebene $x_0 = 0$
eigentliche Gerade	Ebene durch O verschieden von $x_0 = 0$

und einen Ausblick auf Kegelschnitte im P^2, vgl. Figur-3-3-2-Modell

Kann übersprungen werden.

Betrachte im $\mathbb{R}^3$ den Schitt eines (im allgemeinen schiefen) Kreiskegel mit Spitze in O mit der Ebene $x_0 = 0$:

Kreis	Menge der Erzeugenden eines Kreiskegels mit Kreis in Ebene $x_0 = 1$
Ellipse	Menge der Erzeugenden eines allgem. Kreiskegels
Hyperbel	selbe Beschreibung
Parabel	selbe Beschreibung

Fallunterscheidung nach Schnitt des Kegels mit der Ebene $x_0 = 0$. Hat dieser:

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right\} \text{Erzeugende} \ldots \left\{ \begin{array}{c} \text{Ellipse/Kreis} \\ \text{Parabel} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}.$$

3.3.2 Einführung homogener Koordinaten im projektiven Raum P^3

Die Einführung homogener Koordinaten erfolgt im P^3 analog zum P^2 durch Einbetten des P^3 im $x_0x_1x_2x_3$-Koordinatensytem des $\mathbb{R}^4$ als 3-dim. Raum mit $x_0 = 1$ (allgem. des P^n im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $x_0 = 1$), also durch Hinzunahme der homogenisierenden Koordinate x_0, wobei die **homogenen Koordinaten** $\vec{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3)^T \in \mathbb{R}^4 \backslash \{\vec{o}\}$ eines Punktes P nur bis auf einen **homogenisierenden Faktor** $\rho \neq 0$ bestimmt sind.

Für $p_0 \neq 0$ erhält man die **affinen Koordinaten** von P (im 3-dim. Unter-Raum $x_0 = 1$) als

$$p_x = \frac{p_1}{p_0},\ p_y = \frac{p_2}{p_0},\ p_z = \frac{p_3}{p_0}.$$

Im Fall $p_0 = 0$ liegt ein Fernpunkt vor, d.h. der Schnittpunkt aller zur Richtung $\vec{p}$ parallelen Geraden in $x_0 = 1$.

3.3.3 Projektivitäten

(nachgeholte Definition zu 2.2.8)

Eine Projektivität π des P^n ($n = 2$, 3 oder $n \in \mathbb{N}$) ist eine bijektive lineare Abbildung

$$\pi : \begin{cases} P^n & \to & P^n \\ X(x_0, x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & X'(x_0', x_1', \ldots, x_n') \end{cases},$$

die in homogenen Koordinaten gegeben ist durch

$$\vec{x}\,' = A\vec{x}$$

mit einer $(n+1) \times (n+1)$-Matrix A mit $\det A \neq 0$ (regulär) und

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{\vec{o}\}$$

Da die homogenen Koordinaten nur bis auf einen homogenisierenden Faktor $\neq 0$ bestimmt sind, ist auch A nur bis auf einen Faktor $\neq 0$ bestimmt.

Ausführlicher in P^3: $\quad \vec{x}\,' = A\vec{x} \quad$ mit
$\vec{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T, \vec{x}\,' = (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)^T$

$$\text{und} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$x'_0 = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3$$
$$x'_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$
$$x'_2 = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$
$$x'_3 = a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

Die ausführliche Darstellung im P^2 erhält man durch Streichen der letzen Zeile und der letzen Spalte.

Projektivitäten sind (als lineare Abbildungen) geradentreu (also Kollineationen) und damit DV-treu. (o. Bew.)

Zusatz: (fakultativ)
Entzerrung eines Fotos mit Hilfe des DV.
Figur-3-3-3-Projektivität-Entzerrung

3.3.4 Affinitäten (siehe 2.2.8)

Die Menge der Fernpunkte des P^n in bleibt in 3.3.3 fest $\iff$ $(x_0 = 0 \Leftrightarrow x'_0 = 0)$ $\iff$ $a_{01} = a_{02} = \ldots = a_{0n} = 0$.

Betrachte im P^3 die Bilder von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wegen $\det A \neq 0$ ist dann $a_{00} \neq 0$.

Da $\vec{x}$, $\vec{x}\,'$ homogene Koordinatenvektoren sind, kann man A ersetzen durch

$$\frac{1}{a_{00}} A.$$

Für $n = 3$:

$$\frac{1}{a_{00}} A = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{30} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array} \right)$$

Der Übergang zu affinen Koordinaten $\vec{p}$, $\vec{p}\,'$ für eigentliche Punkt X, X' ($\vec{p}$, $\vec{p}\,' \in \mathbb{R}^n$)

$$\frac{1}{x_0} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{x'_0} \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{p}\,' \end{pmatrix},$$

liefert:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vec{p}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{o}^T \\ \vec{b} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

oder kurz (im $\mathbb{R}^n$)

$$\vec{p}' = B\vec{p} + \vec{b}$$

Vgl. bijektive affine Abbildung des $\mathbb{R}^n$ oder 3.1.3 (Basis-/Koordinatenwechsel)

mit $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_{10} \\ \vdots \\ b_{n0} \end{pmatrix}$ (vgl. 1.Spalte von $\frac{1}{a_{00}}A$),

und einer $n \times n$-Matrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \ \det(B) \neq 0.$$

Für $n = 3$:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_{10} \\ b_{20} \\ b_{30} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \ \det(B) \neq 0.$$