7 Flächen

7.1 Flächenbegriff

7.1.1 Beispiel: Kugel

Kugel im Raum:

$x^2+y^2+z^2=r^2$ ... **implizite Darstellung**

Erkunde Figur 7-1-Bsp-Kugel

Erstes Kennenlernen von Definitonen und Begriffen

$x = r\cos u \cos v$
$y = r\cos u \sin v$
$z = r\sin u$

Bei "Erdkugel":
u ..."geographische Breite"
v ..."geographische Länge"

7.1.2 Def.: Parametrisierte Fläche

Eine (C^r-)**Fläche** Φ in $\mathbb{E}^3$ ist gegeben durch
eine C^r-Abb. $\vec{x}$ eines Gebiets $G \subset \mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^3$ $(r \geq 1)$:

$$\vec{x} : G \to \mathbb{R}^3,$$

$$\vec{x} : (u,v) \mapsto \vec{x}(u,v).$$

$\vec{x}$ ... **Parameterdarstellung**, kurz: **PD**
G ... **Parametergebiet**

Schreibweise: $\Phi : \vec{x}(u,v),\ (u,v) \in G \subset \mathbb{R}^2$

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(u,v) \\ x_2(u,v) \\ x_3(u,v) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1(u_1,u_2) \\ x_2(u_1,u_2) \\ x_3(u_1,u_2) \end{pmatrix} ,\ (u_1,u_2) \in G \subset \mathbb{R}^2$$

7.1.3 Def.: Flächenkurve

Vgl. Figur 7-1-Bsp-Kugel

Seien $\Phi : \vec{x}(u,v),\ (u,v) \in G$ eine C^r-Fläche in $\mathbb{E}^3$ und
$c_0 : \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix},\ t \in I$, eine C^r-Kurve in G.
Dann heißt $c : \vec{y}(t) := \vec{x}(u(t),v(t)),\ t \in I$, eine C^r-Flächenkurve von Φ.

7.1.4 Parameterlinien

Vgl. Figur 7-1-Bsp-Kugel

Flächenkurven der Gestalt
$\vec{x}(u,v_0),\ u \in I$ heißen u-**Linien** oder **1-Linien**,
$\vec{x}(u_0,v),\ v \in J$ heißen v-**Linien** oder **2-Linien**.

Zu jeder Parameterstelle (u_0, v_0) gibt es genau eine
u-Linie $\vec{x}(u, v_0),\ u \in I$ und genau eine
v-Linie $\vec{x}(u_0, v),\ v \in J$.

Die Parameterlinien von Φ bilden ein **Gitter** oder ein **Netz** auf Φ.

7.1.5 Tangentenvektoren

Vgl. Figur 7-1-Bsp-Kugel

Ist $\Phi : \vec{x}(u, v),\ (u, v) \in G$ eine C^1-Fläche und
$c : \vec{y}(t) := \vec{x}(u(t), v(t)),\ t \in I$, eine C^1-Flächenkurve von Φ, so sind:
$\vec{x}_1 := \vec{x}_u := \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}$ ein Tangentenvektor an eine u-Linie,
$\vec{x}_2 := \vec{x}_v := \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}$ ein Tangentenvektor an eine v-Linie,
und nach der Kettenregel
$\dot{\vec{y}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} = \vec{x}_u \dot{u} + \vec{x}_v \dot{v}$
ein Tangentenvektor an $c \subset \Phi$.

Frage: Spannen die Vektoren $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ immer eine Ebene (die Tangentenebene an Φ) auf?

7.1.6 Regularität

Erkunde Figur 7-1-Bsp-Kegel

Ist $\Phi : \vec{x}(u,v),\ (u,v) \in G$, eine C^1-Fläche, so heißt $(u_0, v_0) \in G$ eine **reguläre Parameterstelle** von Φ, wenn gilt:

$$\{\vec{x}_u(u_0,v_0), \vec{x}_v(u_0,v_0)\} \text{ linear unabhängig}$$

$$\Leftrightarrow \vec{x}_u \times \vec{x}_v|_{(u_0,v_0)} \neq \vec{o}.$$

Andernfalls heißt (u_0, v_0) **singulär**.

Sind alle $(u,v) \in G$ regulär, so heißt Φ eine **reguläre Fläche**.

Eine PD $\vec{x}(u,v),\ (u,v) \in G$, einer regulären C^r-Fläche Φ nennt man C^r-**zulässig** oder eine **zulässige** C^r**-PD** von Φ.

7.1.7 Einfachheit

Erkunde Figur 7-1-Bsp-Regelfläche

Sei $\Phi : \vec{x}(u,v),\ (u,v) \in G$, eine Fläche. Ein Punkt $\vec{x}(u_0,v_0)$ heißt **einfacher Punkt** von Φ, wenn für alle $(u,v) \in G$ gilt:

$\vec{x}(u,v) = \vec{x}(u_0,v_0) \Rightarrow (u,v) = (u_0,v_0).$

Ist (u_0,v_0) zudem eine reguläre Stelle, so heißt $\vec{x}(u_0,v_0)$ **regulärer Punkt** von Φ.

Die Fläche Φ heißt **einfache Fläche**, wenn alle Punkte von Φ einfach sind.

7.1.8 Tangential-VR, Tangentialebene

Sei $\Phi : \vec{x}(u,v),\ (u,v) \in G$, eine C^1-Fläche; sei $(u_0, v_0) \in G$ eine **reguläre** Stelle von Φ. Dann heißt der VR mit der Basis $\{\vec{x}_u(u_0,v_0), \vec{x}_v(u_0,v_0)\}$ der **Tangential-VR** (kurz: **TVR**) von Φ an der Stelle (u_0, v_0).

Die Ebene durch $\vec{x}(u_0,v_0)$, die von $\vec{x}_u(u_0,v_0)$ und $\vec{x}_v(u_0,v_0)$ aufgespannt wird, heißt **Tangentialebene** (kurz: **TE**) oder **Tangentenebene** von Φ an der Stelle (u_0, v_0). $\vec{n}(u_0,v_0) := \vec{x}_u(u_0,v_0) \times \vec{x}_v(u_0,v_0)$ ist der **Normalenvektor** von Φ in (u_0, v_0).

7.1.9 Flächenvektoren, Flächentangenten

Sei $\Phi : \vec{x}(u,v),\ (u,v) \in G$, eine C^1-Fläche; sei $(u_0, v_0) \in G$ eine **reguläre** Stelle von Φ.

a) Ist $c_0 : \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix},\ t \in I$, eine C^1-Kurve mit der regulären Stelle t_0 und $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$ in $G \subset \mathbb{R}^2$, und

ist $c : \vec{y}(t) := \vec{x}(u(t), v(t)),\ t \in I$, die zugehörige Flächenkurve, so liegt

der **Tangentenvektor** $\dot{\vec{y}} = \vec{x}_u \dot{u} + \vec{x}_v \dot{v}$

von c an der Stelle t_0 im TVR von Φ an (u_0, v_0) und c ist regulär in t_0.

b) Zu jedem Vektor

$$a_1\,\vec{x}_u(u_0,v_0)+a_2\,\vec{x}_v(u_0,v_0)$$

im TVR von Φ an der Stelle (u_0,v_0) gibt es eine Flächenkurve c von Φ durch $\vec{x}(u_0,v_0)$, so dass gilt:

Der Tangentialvektor von c an der Stelle $t=0$ mit $(u(0),v(0))=(u_0,v_0)$ ist der vorgegebene Vektor $a_1\,\vec{x}_u(u_0,v_0)+a_2\,\vec{x}_v(u_0,v_0)$.

Vgl. Figuren 7-1-Bsp-Kugel/Kegel/Regelfläche Flächenkurve.

Bew. von a): Kettenregel und $\dot{\vec{y}}(t_0)\neq\vec{o}$ wegen $\vec{x}_u,\vec{x}_v$ l.u. und $(\dot{u},\dot{v})\neq(0,0)$.
von b): Wir setzen

$$c_0:\begin{pmatrix}u(t)\\v(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_0+ta_1\\v_0+ta_2\end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\dot{\vec{x}}(u(t),v(t))=\vec{x}_u\dot{u}+\vec{x}_v\dot{v}=\vec{x}_ua_1+\vec{x}_va_2$$

längs c, und speziell für $t=0$:
$\dot{\vec{x}}(u(0),v(0))=a_1\,\vec{x}_u(u_0,v_0)+a_2\,\vec{x}_v(u_0,v_0)$.

Bezeichnung:
a_1,a_2 heißen die **Flächenkoordinaten** des **Flächenvektors** $a_1\,\vec{x}_u+a_2\,\vec{x}_v$.

7.2 Messen auf Flächen

Bei der Berechnung der Länge einer Flächenkurve
$c : \vec{y}(t) = \vec{x}(u(t), v(t))$, $t \in [t_1, t_2]$ benötigt man: $|\dot{\vec{y}}(t)|$, also

$$\dot{\vec{y}}(t)^2 = (\vec{x}_u \dot{u} + \vec{x}_v \dot{v})^2 = \vec{x}_u^2 \dot{u}^2 + \vec{x}_u \vec{x}_v \dot{u}\dot{v} + \vec{x}_v \vec{x}_u \dot{v}\dot{u} + \vec{x}_v^2 \dot{v}^2$$

Da die dabei auftretenden Skalarprodukte von $\vec{x}_u$ und $\vec{x}_v$ immer wieder auftreten, bezeichnet man diese als Fundamentalgrößen und kann mit ihnen

- Längen von Flächenkurven,
- Winkel schneidender Flächenkurven,
- Oberflächen von Flächenstücken,

(ohne Rückgriff auf den umgebenden Raum) allein über das Parametergebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ berechnen, d.h. sie sind Größen der **Inneren Geometrie**.

7.2.1 Die erste Grundform der Flächentheorie

Erkunde Fig. 7-2-Flächenmetrik-Rechteck (Schritte 1-7)

Sei Φ : $\vec{x}(u, v)$, $(u, v) \in G$, eine reguläre C^1-Fläche. Dann heißen

$$g_{11}(u, v) := \vec{x}_u(u, v) \cdot \vec{x}_u(u, v) =: E(u, v),$$

$$g_{12} := \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v =: g_{21} =: F, \;\; g_{22} := \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v =: G$$

die **Fundamentalgrößen 1. Art** oder die **metrischen Fundamentalgrößen** oder die **Koeffizienten der 1. Grundform** von Φ.

Die Bezeichnungen E, F, G stammen noch von Gauß aus den "Disquisitiones generales circa superficies curvas" (1828).

Länge des Normalenvektors von Φ:

$$\vec{n} := \vec{x}_u \times \vec{x}_v$$

Nach LAGRANGE-Identität gilt:

$$(\vec{x}_u \times \vec{x}_v)^2 = \vec{x}_u^2 \ \vec{x}_v^2 - (\vec{x}_u \ \vec{x}_v)^2 =$$

$$= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} =: g$$

$$\text{also} \quad |\vec{n}| = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{g}$$

Mit der **Determinante der 1. Grundform** erhält man den **Nomaleneinheitsvektor** von Φ als:

$$\vec{n}_e := \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\sqrt{g}}$$

Beachte den Rechenvorteil zur Berechnung von $|\vec{n}|$ und zum Nachweis der Regularität einer Stelle (u_0, v_0) von Φ : $\vec{x}(u, v)$:

$$\{\vec{x}_u(u_0, v_0), \vec{x}_v(u_0, v_0)\} \text{ linear unabhängig}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{x}_u \times \vec{x}_v|_{(u_0,v_0)} \neq \vec{o}.$$

$$\Leftrightarrow \quad (\vec{x}_u \times \vec{x}_v)^2|_{(u_0,v_0)} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad g(u_0, v_0) \neq 0$$

7.2.2 Länge einer Flächenkurve

$c:\ \vec{y}(t) := \vec{x}(u(t), v(t)),\ t \in I$ reguläre C^1-Flächenkurve einer regulären C^1-Fläche $\Phi:\ \vec{x}(u,v),\ (u,v) \in G$.

Dann ist die Länge eines Kurvenstücks von c:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{y}}(t)|\ dt = \int_{t_1}^{t_2} |\frac{d\vec{x}(u(t),v(t))}{dt}|\ dt$$

mit

$$\dot{\vec{y}}(t)^2 = (\vec{x}_u \dot{u} + \vec{x}_v \dot{v})^2 =$$

$$= \vec{x}_u^2 \dot{u}^2 + \vec{x}_u \vec{x}_v \dot{u}\dot{v} + \vec{x}_v \vec{x}_u \dot{v}\dot{u} + \vec{x}_v^2 \dot{v}^2 =$$

$$= g_{11}\dot{u}^2 + 2g_{12}\dot{u}\dot{v} + g_{22}\dot{v}^2.$$

Satz: Ist eine reguläre C^1-Flächenkure c einer regulären C^1-Fläche $\Phi\ :\ \vec{x}(u,v),\ (u,v) \in G$, gegeben durch $(u(t), v(t)),\ t \in [t_1, t_2]$, so gilt für die Länge s von c:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{11}\dot{u}^2 + 2g_{12}\dot{u}\dot{v} + g_{22}\dot{v}^2}\ dt.$$

Die quadratische Form

$$I(a_1, a_2) := g_{11}a_1^2 + 2g_{12}a_1a_2 + g_{22}a_2^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

heißt die **1. Grundform** oder **1. Fundamentalform** von Φ (an der Stelle (u, v)).

7.2.3 Skalarprodukt und 1. Grundform

Erkunde Fig. 7-2-Flächenmetrik-Rechteck (Schritte 8-10)

Sind $\vec{a} = a_1\vec{x}_u + a_2\vec{x}_v$ und $\vec{b} = b_1\vec{x}_u + b_2\vec{x}_v$ aus dem TVR einer Fläche Φ an einer Stelle (u_0, v_0), so ist

$$\vec{a}\,\vec{b} = g_{11}a_1b_1 + g_{12}a_1b_2 + g_{21}a_2b_1 + g_{22}a_2b_2 =$$

$$= g_{11}a_1b_1 + g_{12}(a_1b_2 + a_2b_1) + g_{22}a_2b_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die symmetrische Bilinearform, die zu der quadratischen Form $I(\ldots)$ gehört.

7.2.4 Winkel zweier Flächenvektoren

Sind $\vec{o} \neq \vec{a} = a_1\vec{x}_u + a_2\vec{x}_v$ und $\vec{o} \neq \vec{b} = b_1\vec{x}_u + b_2\vec{x}_v$ zwei Flächenvektoren einer Fläche Φ an einer Stelle (u_0, v_0), so ist

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) =$$

$$= \frac{g_{11}a_1b_1 + g_{12}(a_1b_2 + a_2b_1) + g_{22}a_2b_2}{\sqrt{I(a_1,a_2)}\sqrt{I(b_1,b_2)}}.$$

7.2.5 Winkel der Parameterlinien

Sei (u_0, v_0) eine reguläre Stelle einer C^1-Fläche Φ : $\vec{x}(u,v), \quad (u,v) \in G \subset \mathbb{R}^2$.
Dann gilt für den Schnittwinkel der Parameterlinien in $\vec{x}(u_0, v_0)$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{x}_u\,\vec{x}_v}{\sqrt{\vec{x}_u^2}\sqrt{\vec{x}_v^2}} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}.$$

Die Parameterlinien bilden ein **orthogonales Netz** auf Φ $\Leftrightarrow g_{12} = 0 \ \forall\ (u,v) \in G$.

7.2.6 Winkel zwischen Flächenkurven

Seien c, $\bar{c}$ zwei reguläre C^1-Flächenkurven auf einer regulären C^1-Fläche $\Phi:\ \vec{x}(u,v),\ (u,v)\in G$, gegeben durch:

$$c_0:\ (u(t),v(t)),\ t\in I,$$

$$\bar{c}_0:\ (\bar{u}(\bar{t}),\bar{v}(\bar{t})),\ \bar{t}\in J,$$

die einander in einem Punkt $\vec{x}(u_0,v_0)$ schneiden mit

$$(u_0,v_0)=(u(t_0),v(t_0))=(\bar{u}(\bar{t}_0),\bar{v}(\bar{t}_0)).$$

Dann ist der Winkel φ von c und $\bar{c}$ gegeben durch

$$\cos\varphi=\frac{g_{11}\dot{u}\dot{\bar{u}}+g_{12}(\dot{u}\dot{\bar{v}}+\dot{\bar{u}}\dot{v})+g_{22}\dot{v}\dot{\bar{v}}}{\sqrt{I(\dot{u},\dot{v})}\sqrt{I(\dot{\bar{u}},\dot{\bar{v}})}}.$$

Dabei bezeichnet " $\dot{}$ " bei u,v die Ableitung nach t und bei $\bar{u},\bar{v}$ die nach $\bar{t}$.

Vgl. Figur 7-2-Flächenmetrik-Rechteck (Schritt 8-10)

7.2.7 Oberfläche eines Flächenstücks, Motivation:

Erkunde Figur 7-2-Herleitung-Oberfläche

Fläche Φ mit einer Masche des Parameternetzes mit Parameterwerten (u_i, v_k), (u_{i+1}, v_k), (u_i, v_{k+1}), (u_{i+1}, v_{k+1}).

Fläche einer Masche des Gitters nach MWS (*) näherungsweise:

$$|(\vec{x}(u_{i+1}, v_k) - \vec{x}(u_i, v_k)) \times (\vec{x}(u_i, v_{k+1}) - \vec{x}(u_i, v_k))|$$

$$\overset{(*)}{\approx} |\vec{x}_u(u_i, v_k)(u_{i+1} - u_i) \times \vec{x}_v(u_i, v_k)(v_{k+1} - v_k)|$$

$$= |\vec{x}_u(u_i, v_k) \times \vec{x}_v(u_i, v_k)| \Delta u_i \Delta v_k$$

D.h.: Die Oberfläche von Φ wird angenähert durch

$$\sum_i \sum_k |\vec{x}_u(u_i, v_k) \times \vec{x}_v(u_i, v_k)| \Delta u_i \Delta v_k =$$

$$= \sum_i \sum_k \sqrt{g(u_i, v_k)} \Delta u_i \Delta v_k$$

7.2.8 Oberfläche eines Flächenstücks: Satz/Def.:

Sei $\Phi: \ \vec{x}(u,v), \ (u,v) \in G$, eine reguläre C^1-Fläche. Sei $D \subset G$ ein abgeschlossenes Gebiet und Ψ das zugehörige Flächenstück von Φ. Dann heißt

$$O := \int\int_D \sqrt{g} \ du \ dv$$

die Oberfläche von Ψ.

Siehe Figur 7-2-Flächenmetrik-Kreis (Schritte 11+12) Schritte 1-10 zur Wiederholung

7.2.9 Bsp.: Oberfläche einer Drehfläche

$$\text{Sei } m: \ \vec{m}(u) := \begin{pmatrix} r(u) \\ 0 \\ z(u) \end{pmatrix}, \ u \in I,$$

eine C^1-Kurve in der xz-Ebene und

$$\Phi: \ \vec{x}(u,v) := \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{m}(u) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos v \cdot r(u) \\ \sin v \cdot r(u) \\ z(u) \end{pmatrix}, \ (u,v) \in G := I \times [0, 2\pi)$$

eine **Drehfläche** mit dem **Meridian** m und der z-Achse als **Drehachse**.

Dann gilt:

$$\vec{x}_u = \begin{pmatrix} \cos v \cdot \dot{r}(u) \\ \sin v \cdot \dot{r}(u) \\ \dot{z}(u) \end{pmatrix}, \vec{x}_v = \begin{pmatrix} -\sin v \cdot r(u) \\ \cos v \cdot r(u) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$g_{11} = \vec{x}_u^2 = \dot{r}^2 + \dot{z}^2, \; g_{12} = \vec{x}_u \vec{x}_v = 0, g_{22} = \vec{x}_v^2 = r^2.$$

$$g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = r^2 \, (\dot{r}^2 + \dot{z}^2).$$

Also:

$$O = \int_0^{2\pi} \int_I |r| \sqrt{\dot{r}^2 + \dot{z}^2} \; du \; dv =$$

$$= \int_I \int_0^{2\pi} |r| \sqrt{\dot{r}^2 + \dot{z}^2} \; dv \; du =$$

$$= 2\pi \int_I |r| \sqrt{\dot{r}^2 + \dot{z}^2} \; du.$$

Bem.: O berechnet sich für Drehflächen als ein Einfach-Integral.

Bem.: Wegen $g_{12} = 0$ bilden die Meridiane und die **Breitenkreise** auf jeder regulären C^1-Drehfläche ein orthogonales Netz.

Beachte: Stellen mit $r = 0$ oder $(\dot{u}, \dot{v}) = (0, 0)$ (d.h. singuläre Stellen von m) sind singuläre Stellen der Drehfläche.

$r(u) = \cos u, \; z(u) = \sin u, \; u \in]-\pi, \pi]$ liefert $O = 0$. Warum?

7.3 Parametertransformation (PT)
7.3.1 PT: Def.:

Erkunde Figur 7-3-PT

Sei $\Phi: \ \vec{x}(u,v), \ (u,v) \in G$, eine C^r-Fläche, $r \geq 1$. Sei $\overline{G}$ ein Gebiet in $\mathbb{R}^2$ und

$$f: \begin{cases} \overline{G} & \to & G \\ (\bar{u},\bar{v}) & \mapsto & (u,v) = (u(\bar{u},\bar{v}), v(\bar{u},\bar{v})) \end{cases},$$

eine bijektive C^r-Abbildung. Dann ist $\Phi: \ \vec{y}(\bar{u},\bar{v}) := \vec{x}(u(\bar{u},\bar{v}), v(\bar{u},\bar{v})), \ (\bar{u},\bar{v}) \in \overline{G}$, eine (im allgemeinen andere) PD von Φ, und f heißt eine **PT** von Φ.

Welche Bedingung muss f erfüllen, damit reguläre Stellen von $\vec{x}(u,v)$ bei PT reguläre Stellen von $\vec{y}(\bar{u},\bar{v})$ bleiben?

7.3.2 Transformation des Normalenvektors

$$\text{Kettenregel} \ \Rightarrow \ \begin{array}{l} \vec{y}_{\bar{u}} = \vec{x}_u u_{\bar{u}} + \vec{x}_v v_{\bar{u}} \\ \vec{y}_{\bar{v}} = \vec{x}_u u_{\bar{v}} + \vec{x}_v v_{\bar{v}} \end{array} \qquad (*)$$

und damit der neue Normalenvektor

$$\vec{y}_{\bar{u}} \times \vec{y}_{\bar{v}} = (\vec{x}_u u_{\bar{u}} + \vec{x}_v v_{\bar{u}}) \times (\vec{x}_u u_{\bar{v}} + \vec{x}_v v_{\bar{v}}) =$$

$$= \vec{x}_u \times \vec{x}_v \cdot (u_{\bar{u}} v_{\bar{v}} - v_{\bar{u}} u_{\bar{v}}) =$$

$$= \vec{x}_u \times \vec{x}_v \cdot \det \begin{pmatrix} u_{\bar{u}} & u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{u}} & v_{\bar{v}} \end{pmatrix}$$

Satz/Def:
Eine PT f (s.o.) heißt **zulässig**, wenn

$$\det\begin{pmatrix} u_{\bar u} & u_{\bar v} \\ v_{\bar u} & v_{\bar v}\end{pmatrix} =: \frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar u,\bar v)} \neq 0,$$

wenn also die Matrix

$$\begin{pmatrix} u_{\bar u} & u_{\bar v} \\ v_{\bar u} & v_{\bar v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar u} & \frac{\partial u}{\partial \bar v} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar u} & \frac{\partial v}{\partial \bar v}\end{pmatrix}$$

regulär ist.

Satz: Sei Φ : $\vec{x}(u,v)$, $(u,v) \in G$, eine reguläre C^r-Fläche in $\mathbb{E}^3$, $r \geq 1$,

$$f: \begin{cases} \overline{G} & \to & G \\ (\bar u, \bar v) & \mapsto & (u,v) = (u(\bar u,\bar v), v(\bar u,\bar v)) \end{cases},$$

eine zulässige C^r-PT. Dann ist
$\vec{y}(\bar u,\bar v) := \vec{x}(u(\bar u,\bar v), v(\bar u,\bar v))$ eine zul. C^r-PD von Φ.

Berechnung der Oberfläche bei PT:

$$O = \iint_{\overline{G}} |\vec{y}_{\bar u} \times \vec{y}_{\bar v}| d\bar u d\bar v$$

$$= \iint_{\overline{G}} |\vec{x}_u \times \vec{x}_v|_{(u(\bar u,\bar v),v(\bar u,\bar v))} \frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar u,\bar v)} d\bar u d\bar v$$

$$= \iint_G |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| du dv$$

Vergleiche Substitutionsregeln bei Doppelintergralen.

7.3.3 Transformation des Tangentialraums

Sei

$$\vec{a} = a_1\vec{x}_u + a_2\vec{x}_v = \bar{a}_1\vec{y}_{\bar{u}} + \bar{a}_2\vec{y}_{\bar{v}}$$

die Darstellung eines Flächenvektors in den beiden Basen des TVR. Dann gilt mit (*)

$$\vec{a} = \bar{a}_1(\vec{x}_u u_{\bar{u}} + \vec{x}_v v_{\bar{u}}) + \bar{a}_2(\vec{x}_u u_{\bar{v}} + \vec{x}_v v_{\bar{v}}).$$

Koeffizientenvergleich bei den linear unabhängigen Vektoren $\vec{x}_u$ und $\vec{x}_v$ liefert:

$$\begin{matrix} a_1 = \bar{a}_1 u_{\bar{u}} + \bar{a}_2 u_{\bar{v}} \\ a_2 = \bar{a}_1 v_{\bar{u}} + \bar{a}_2 v_{\bar{v}} \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\bar{u}} & u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{u}} & v_{\bar{v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

Das sind Transformationsformeln für Flächenkoordinaten bei einer PT.

Bem: Die Matrix $M = \begin{pmatrix} u_{\bar{u}} & u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{u}} & v_{\bar{v}} \end{pmatrix}$ bestimmt in (**) die Koordinatentransformation, M^T in (**) den Basiswechsel, vgl. 3.1.2.

Da (u, v) und $(\bar{u}, \bar{v})$ nicht voreinander ausgezeichnet sind, kann man in beiden Formelgruppen auch die gequerten und die nicht gequerten Größen vertauschen.

7.3.4 Transformation der 1. Grundform

Direkte Berechnung der $\bar{g}_{ij}$:

$$\begin{aligned}\bar{g}_{11} &= \vec{y}_{\bar{u}}\vec{y}_{\bar{u}} = (\vec{x}_u u_{\bar{u}} + \vec{x}_v v_{\bar{u}})(\vec{x}_u u_{\bar{u}} + \vec{x}_v v_{\bar{u}})\\ &= g_{11}u_{\bar{u}}^2 + g_{12}(u_{\bar{u}}v_{\bar{u}} + v_{\bar{u}}u_{\bar{u}}) + g_{22}v_{\bar{u}}^2\\ &= g_{11}u_{\bar{u}}^2 + 2g_{12}u_{\bar{u}}v_{\bar{u}} + g_{22}v_{\bar{u}}^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{g}_{12} &= \vec{y}_{\bar{u}}\vec{y}_{\bar{v}} = (\vec{x}_u u_{\bar{u}} + \vec{x}_v v_{\bar{u}})(\vec{x}_u u_{\bar{v}} + \vec{x}_v v_{\bar{v}})\\ &= g_{11}u_{\bar{u}}u_{\bar{v}} + g_{12}(u_{\bar{u}}v_{\bar{v}} + v_{\bar{u}}u_{\bar{v}}) + g_{22}v_{\bar{u}}v_{\bar{v}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{g}_{22} &= \vec{y}_{\bar{v}}\vec{y}_{\bar{v}} = (\vec{x}_u u_{\bar{v}} + \vec{x}_v v_{\bar{v}})(\vec{x}_u u_{\bar{v}} + \vec{x}_v v_{\bar{v}})\\ &= g_{11}u_{\bar{v}}^2 + g_{12}(u_{\bar{v}}v_{\bar{v}} + v_{\bar{v}}u_{\bar{v}}) + g_{22}v_{\bar{v}}^2\\ &= g_{11}u_{\bar{v}}^2 + 2g_{12}u_{\bar{v}}v_{\bar{v}} + g_{22}v_{\bar{v}}^2.\end{aligned}$$

oder mit 1. Fundamentalform und KT:

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} =\\ &\begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u_{\bar{u}} & u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{u}} & v_{\bar{v}} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\bar{u}} & u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{u}} & v_{\bar{v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{g}_{11} & \bar{g}_{12} \\ \bar{g}_{21} & \bar{g}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

also $\quad (\bar{g}_{ij}) = M^T(g_{ij})M \qquad \Rightarrow$

$$\bar{g} := \det \begin{pmatrix} \bar{g}_{11} & \bar{g}_{12} \\ \bar{g}_{21} & \bar{g}_{22} \end{pmatrix} = g \cdot \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}\right)^2$$

Für die letzte Gleichung kann man auch die Transformation des Normalenvektors aus 7.3.2 und $|\vec{x}_u \times \vec{x}_v| = \sqrt{g}$ verwenden.

7.4 Flächenabbildung

Eruiere
Figur 7-4-Flächenabbilung (**Schritte 1-3**)

Flächen Φ und Φ^*, zugehörige Parametergebiete G und G^*, Flächenabbildung $\alpha:\ \Phi \to \Phi^*$, Parameterdarstellungen $\vec{x}$ und $\vec{x}^*$, Punkt P von Φ mit Bildpunkt $P^* = \alpha P$ von Φ^*

7.4.1 Beschreibung von Flächenabbildungen

Eine bijektive C^r-**Abbildung** α einer einfachen C^r-Fläche Φ: $\vec{x}(u,v)$, $(u,v) \in G$, auf eine einfache C^r-Fläche Φ^* : $\vec{x}^*(u^*,v^*)$, $(u^*,v^*) \in G^*$, wird beschrieben durch eine C^r-Abbildung $G \to G^*$, nämlich $(\vec{x}^*)^{-1} \circ \alpha \circ \vec{x}$: $G \to G^*$, $(u,v) \mapsto (u^*(u,v), v^*(u,v))$.

Figur 7-4-Flächenabbilung (**Schritt 4**)

Das erinnert an eine PT, ist aber zunächst keine.

7.4.2 Kanonische Beschreibung von Flächenabbildungen

PT auf $\Phi^* : G \to G^*$,

$$(u,v) \mapsto (u^*(u,v), v^*(u,v)).$$

Figur 7-4-Flächenabbilung (**Schritt 5+6**)

Jetzt sind Φ und Φ^* auf gleiche Parameter (u,v) bezogen, und zu $P^* = \alpha P$ gehören dieselben Parameterwerte (u,v) wie zu P.

Die Flächen Φ und Φ^* sind **in kanonischer Weise** aufeinander abgebildet.

7.4.3 Def.: Eine bijektive C^r-Abbildung zweier einfacher C^1-Flächen Φ, Φ^* aufeinander heißt

a) **längentreu** (isometrisch) :$\Leftrightarrow$ Entsprechende Kurven auf Φ und Φ^* haben stets gleiche Länge.

b) **winkeltreu** (**konform**) :$\Leftrightarrow$ Entsprechende Kurvenpaare auf Φ und auf Φ^* haben stets gleiche Schnittwinkel.

c) **flächentreu** :$\Leftrightarrow$ Entsprechende Flächenstücke auf Φ und Φ^* haben stets gleiche Flächeninhalte.

Figur 7-4-Flächenabbilung (**Schritt 7-10**)

7.4.4 Satz: Zwei reguläre C^1-Flächen
$\Phi:\ \vec{x}(u,v),\ (u,v)\in G$, und
$\Phi^*:\ \vec{x}^*(u,v),\ (u,v)\in G,$ seien durch eine Flächenabbildung α in kanonischer Weise aufeinander abgebildet. Dann gilt: α ist

a) längentreu (isometrisch) $\Leftrightarrow$
$g^*_{ij}(u,v) = g_{ij}(u,v) \quad \forall\ (u,v)\in G.$

b) winkeltreu (konform) $\Leftrightarrow$
$g^*_{12} : g^*_{11} : g^*_{22} = g_{12} : g_{11} : g_{22}\ \forall\ (u,v)\in G.$
$\Leftrightarrow\ g^*_{ij}(u,v) = \lambda(u,v) g_{ij}(u,v)$ mit
$\lambda(u,v) > 0 \ \ \forall\ (u,v)\in G.$

c) flächentreu $\Leftrightarrow$
$g^*(u,v) = g(u,v) \quad \forall\ (u,v)\in G.$

Bew. für Interessierte auf nächster Seite

Figur **7-4-Flächenabbildung-Katenoid** zeigt die stetige isometrische Verbiegung einer Wendelfläche in ein Katenoid.

7.4.5 Korollar: Für eine bijektive C^1-Flächenabbildung $\alpha:\ \Phi \to \Phi^*$, wobei Φ, Φ^* einfache Flächen sind, gilt: α längentreu $\Leftrightarrow$ α winkeltreu und flächentreu

Bew.: Das folgt unmittelbar aus 7.4.4.

Bew. zu **a)**:
Sei $c_0: \ (u(t),v(t)),\ t\in[0,t_1],\ (u(0),v(0))=(u_0,v_0)\in G$
$\Rightarrow c:\vec{y}(t):=\vec{x}((u(t),v(t))\ ,\ c^*:\vec{y}^*:=\vec{x}^*(u(t),v(t))$

$$\Rightarrow s(t)=\int_0^t|\dot{\vec{y}}(\tau)|d\tau=\int_0^t\sqrt{g_{11}\dot{u}^2+2g_{12}\dot{u}\dot{v}+g_{22}\dot{v}^2}d\tau$$
$$\stackrel{?}{=}\quad\int_0^t\sqrt{g_{11}^*\dot{u}^2+2g_{12}^*\dot{u}\dot{v}+g_{22}^*\dot{v}^2}d\tau=\int_0^t|\dot{\vec{y}}^*(\tau)|d\tau=s^*(t)$$

(⇐) Aus $g_{ij}(u,v)=g_{ij}^*(u,v)\ \ \forall\,(u,v)\in G$ folgt Gleichheit für beliebige Flächenkurven und damit Isometrie.

(⇒) Isometrie, d.h. $s(t)=s^*(t)\ \forall\,t$ und alle Flächenkurven
Betrachte speziell zu festem $(a,b)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$:
$c_0:\ (u(t),v(t))=(u_0+at,v_0+bt)$, mit $(\dot{u},\dot{v})=(a,b)$

$$\Rightarrow\ \ s(t)=\int_0^t\sqrt{g_{11}a^2+2g_{12}ab+g_{22}b^2}d\tau$$
$$\stackrel{!}{=}\int_0^t\sqrt{g_{11}^*a^2+2g_{12}^*ab+g_{22}^*b^2}d\tau=s^*(t)\quad\forall\,t$$

mit $g_{ij}=g_{ij}(u_0+at,v_0+bt)$ und $g_{ij}^*=g_{ij}^*(u_0+at,v_0+bt)$.
Ableiten nach t liefert:

$$\sqrt{g_{11}a^2+2g_{12}ab+g_{22}b^2}=\sqrt{g_{11}^*a^2+2g_{12}^*ab+g_{22}^*b^2}\quad\forall\,t\ \ \Rightarrow$$

(1) für $a=1,\ b=0=t:\ \ g_{11}(u_0,v_0)=g_{11}^*(u_0,v_0)$,
(2) für $b=1,\ a=0=t:\ \ g_{22}(u_0,v_0)=g_{22}^*(u_0,v_0)$,
(3) für $a=b=1,\ t=0$ mit (1/2): $\ g_{12}(u_0,v_0)=g_{12}^*(u_0,v_0)$,
jeweils $\forall\,(u_0,v_0)\in G$.

Bew. zu **b)**: Betrachte zwei Flächenkurven nach 7.2.6.

(⇐) Der Faktor $\lambda(u,v)>0$ kürzt sich in 7.2.6 weg.

(⇒) Betrachte orthogonale Flächenkurven, d.h. $\cos\varphi=0$:
(1) $(\dot{u},\dot{v})=(1,0)$ und $(\dot{\bar{u}},\dot{\bar{v}})\neq(0,0)$ so, dass $\varphi=\pi/2=\varphi^*$
$\Rightarrow\ \ 0=g_{11}\dot{\bar{u}}+g_{12}\dot{\bar{v}}=g_{11}^*\dot{\bar{u}}+g_{12}^*\dot{\bar{v}}\Rightarrow(g_{11}^*,g_{12}^*)=\lambda(g_{11},g_{12})$
(2) Analog folgt mit $(\dot{u},\dot{v})=(0,1)$: $\quad(g_{12}^*,g_{22}^*)=\lambda(g_{12},g_{22})$
Im Fall $g_{12}\neq 0\neq g_{12}^*$ folgt: $\quad(g_{11}^*,g_{12}^*,g_{22}^*)=\lambda(g_{11},g_{12},g_{22})$.

Im Fall $g_{12}=0=g_{12}^*$ wähle speziell
$(\dot{u},\dot{v})=(1,1)$ und $(\dot{\bar{u}},\dot{\bar{v}})\neq(0,0)$ so, dass $\varphi=\pi/2=\varphi^*$
$\Rightarrow\ \ 0=g_{11}\dot{\bar{u}}+g_{22}\dot{\bar{v}}=g_{11}^*\dot{\bar{u}}+g_{22}^*\dot{\bar{v}}\Rightarrow(g_{11}^*,g_{22}^*)=\lambda(g_{11},g_{22})$.

Bew. zu **c)**:
Nach 7.2.8. gilt $\ O=\int\int_B\sqrt{g}\stackrel{?}{=}\int\int_B\sqrt{g^*}=O^*$ für $B\subset G$.

(⇐) Aus $g(u,v)=g^*(u,v)\ \ \forall\,(u,v)\in G$ folgt Gleichheit $\forall\,B$.

(⇒) Flächentreue, d.h. $O=O^*\,\forall\,B\ \stackrel{\text{Analysis}}{\Rightarrow}\ \ g=g^*\ \ \forall\,(u,v)$

7.5 Geodätische

7.5.1 Def.: (erster Ansatz)

Φ regul. C^1-Fläche, c regul. C^1-Flächenkurve von Φ. Dann heißt c **geodätische Linie** von Φ, kurz: **Geodätische** von Φ, wenn gilt:
Für je zwei Punkte P, Q von c, die nicht zu weit auseinander liegen, liegt die kürzeste Verbindung von P und Q auf $c \subset \Phi$.

Beachte: Erlaubt sind nur Wege auf Φ.

Mangel: Was heißt "nicht zu weit auseinander"? Korrekte Definition mit Differentialgleichungen.

7.5.2 Beispiele

Siehe Figur 7-5-Kugel
Sphäre Φ mit Großkreis c, der durch zwei nicht diametrale Punkte P und Q in zwei Bögen c_1 und c_2 zerlegt wird, c_1 kürzer als c_2.
c_1 und c_2 sind Geodätische, die P und Q verbinden. Davon ist c_1 die kürzeste Verbindung von P und Q auf Φ.

Beachte: Gegenpunkte auf der Sphäre werden durch unendlich viele Kürzeste verbunden, andere Punkte auf der Sphäre durch genau eine.

Siehe Figur 7-5-Zylinder
Drehzylinder Φ mit darauf liegender Schraublinie c, auf der P und Q liegen, die zugleich auf einer gemeinsamen Erzeugenden von Φ liegen.
Die Schraublinie c ist dann sicher nicht kürzeste Verbindung von P und Q.
Beachte: Einen Drehzylinder kann man durch "Aufwickeln" aus Papier erzeugen. Dabei bleiben Längen erhalten und Geraden gehen in Schraublinien über.

7.5.3 Satz: Sei Φ eine reguläre C^3-Fläche in $\mathbb{E}^3$. Dann gilt:

a) Jedes geradlinige Kurvenstück in Φ ist eine Geodätische von Φ. (klar!)

b) Zu je zwei Punkten von Φ, die nicht zu weit voneinander entfernt sind, gibt es (in einer nicht zu großen Umgebung) genau eine verbindende Geodätische.

c) Zu jedem Punkt P auf Φ und zu jeder Tangente t von Φ in P gibt es genau eine Geodätische von Φ durch P mit der Tangente t.

d) $c: \vec{y}(t) = \vec{x}(u(t), v(t))$ reguläre C^2-Flächenkurve von $\Phi : \vec{x}(u,v)$, $(u,v) \in G$ ohne W-Punkte. Dann gilt:

c ist Geodätische von Φ $\quad\Leftrightarrow$

In allen Punkten von c ist die Schmiegebene von c senkrecht zu Φ. $\quad\Leftrightarrow$

$\det(\dot{\vec{y}}, \ddot{\vec{y}}, \vec{n}) = 0$ DGL für $(u(t), v(t))$ mit $\vec{n} = \vec{x}_u \times \vec{x}_v$, $\dot{\vec{y}} = \vec{x}_u \dot{u} + \vec{x}_v \dot{v}$ und $\ddot{\vec{y}} = \vec{x}_{uu}\dot{u}^2 + 2\vec{x}_{uv}\dot{u}\dot{v} + \vec{x}_{vv}\dot{v}^2 + \vec{x}_u\ddot{u} + \vec{x}_v\ddot{v}$

Bew.: zu **b)** nach Präzisierung: mit Variationsrechnung (Randwertproblem einer DGL).

zu **c)** Anfangswertproblem einer DGL.

zu **d)** kein Bew., aber Plausibilitätsüberlegung: Spannt man einen Faden zwischen zwei Punkten einer Fläche, so rutscht er in jedem Punkt längs Φ und in Richtung der Schmiegebene des Fadens, bis das nicht mehr geht.

Siehe Figur zu Aufgabe T30 Geodätische auf Kegel.