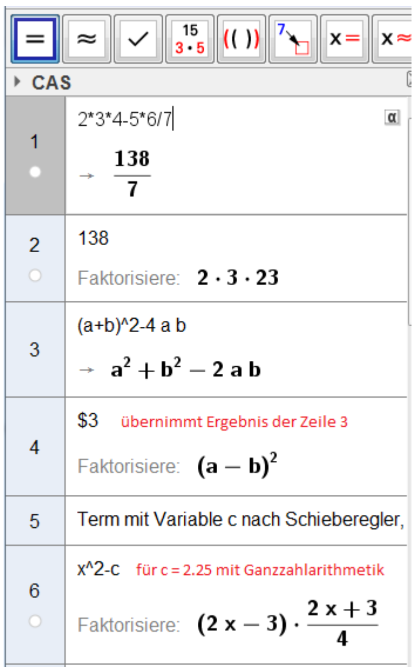
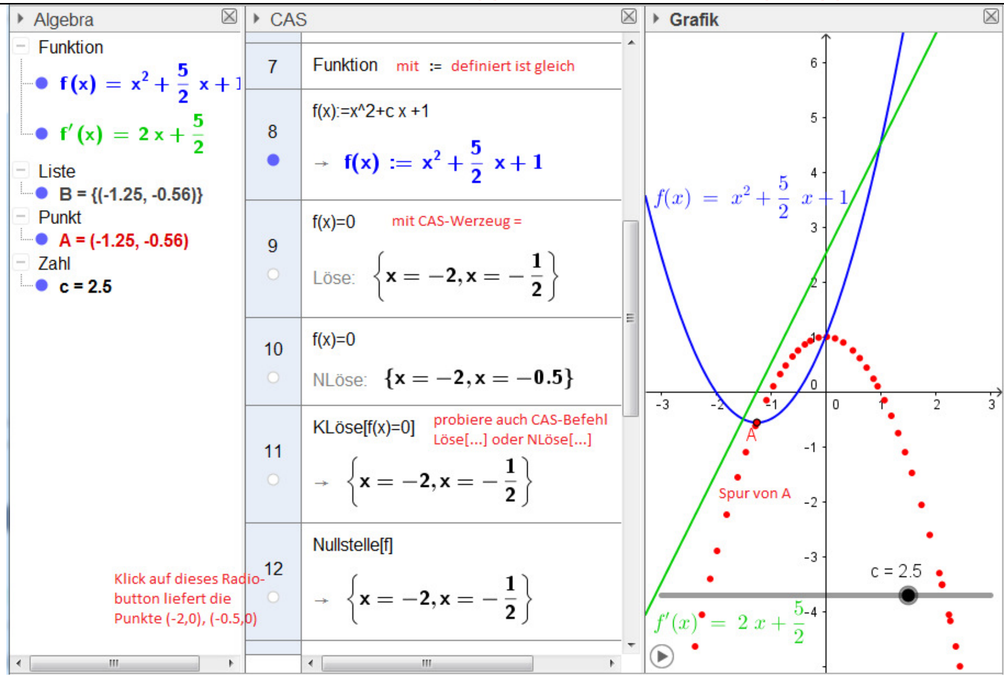
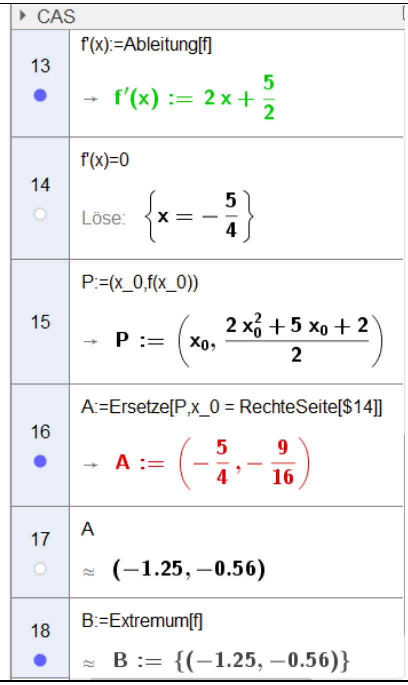
Erste Schritte in Geogebra-CAS

Siehe CAS-ErsteSchritte.ggb und CAS-Gleichungen.ggb







Computer-Algebra-Systeme (**CAS**) wurden für Termumformungen mit Ganzzahlarithmetik und Variablen entwickelt. Werte können natürlich approximativ als Gleitkommazahl ausgegeben werden, vgl. **x =** und **x ≈** .

GeoGebra verbindet den Vorteil der Eingabe über ein Grafikfenster bei **DGS** mit der formalen Darstellung bei **CAS** und enthält zumindest alle schulrelevanten CAS-Befehle. So kann man den Wert für die Variable c im CAS-Teil über einen Schieberegler im Grafikfenster steuern.

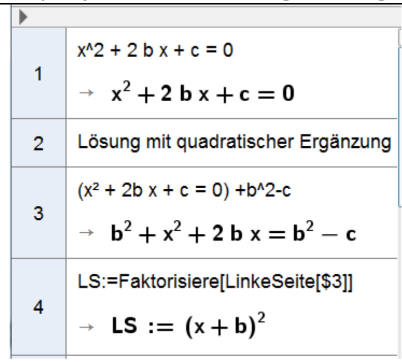
Man kann die Befehle in der Werkzeugleiste nach Eingabe der Terme wählen oder direkt eingeben, vgl. Zeile 2: **Faktorisiere[138]**. Mit dem Ergebnis aus Zeile 3 kann man unter **$3** ($ & Zeilennummer) weiterarbeiten. Aufgrund der Ganzzahlarithmetik faktorisiert GeoGebra z.B. x^2 - ¼ aber nicht x^2- 2, da $\sqrt{2}$ irrational ist. Beachte

Im CAS-Teil ist **a=5+b** eine Gleichung, **a := 5** setzt den Wert von a auf 5, siehe auch Definition einer Funktion
Im DGS-Teil werden bei Eingabe von (a+b)^2 in der Eingabezeile für a und b stets Werte verlangt.

Zur Diskussion einer polynomialen Funktion z.B. **f(x):=x^2+c*x+1** kann man alle reellen Nullstellen durch Lösen der Gleichung **f(x)=0** bestimmen, auch die Nullstellen der Ableitung **f'(x)** und diese in **P := (x_0 ,f(x_0))** einsetzen. Dazu setzt man: **A:=Ersetze[P,x_0=RechteSeite[$14]]** (nicht x_0 = –1.25, damit A dynamisch mitgeht)

Den Scheitel A erhält man direkt auch wie gewohnt als B:=**Extremum[f]**. Alle definierten Objekte erscheinen im Grafikfenster. Bei nichtpolynomialen Funktionen ist zur Nullstellensuche ein geeigneter Bereich anzugeben.

Gleichungsumformungen am Bsp. **quadratische Ergänzung**



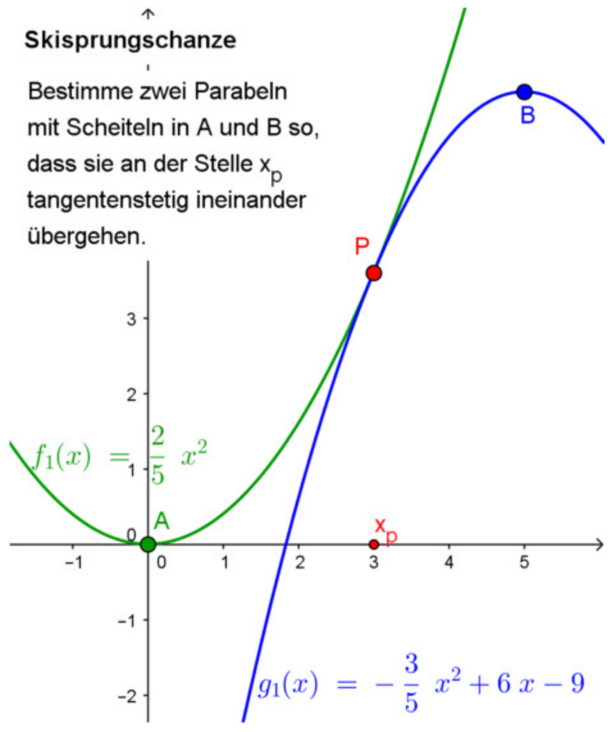
Setze die Gleichung in Klammern und dahinter die gewünschte Umformung, vgl. Zeile 3. Das Umformen einer Seite zeigt Zeile 4.

CAS

1	Parabel: Scheitel A=(0,0), Öffnung a nach oben
2	f(x):= a x^2 → $f(x) := a\ x^2$
3	Parabel: Scheitel B=(5,6), Öffnung b nach unten
4	g(x):= -b *(x-x(B))^2+y(B) → $g(x) := -b\ (x-5)^2 + 6$
5	Tangentenstetiger Übergang an Stelle x=xp
6	xp:=x(x_p) → $xp := 3$
7	Gl1: f(xp)=g(xp) → $Gl1:\ 9\ a = -4\ b + 6$
8	Gl2: f(xp)=g'(xp) → $Gl2:\ 6\ a = 4\ b$
9	{Gl1,Gl2} Löse: $\left\{\left\{a = \frac{2}{5}, b = \frac{3}{5}\right\}\right\}$
10	f_1(x):=Ersetze[f,$9] → $f_1(x) := \frac{2}{5}\ x^2$

Gegeben: Scheitel A und B zweier Parabeln

Gesucht: Tangentenstetiger Übergang in x_P



Siehe: CAS-Skisprungschanze.ggb

Wähle B = (5,5) oder x_P = 2 oder 4

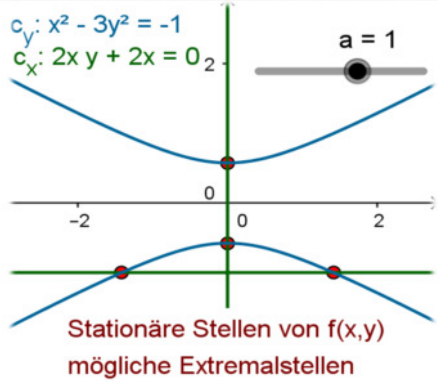
11	g_1(x):=Ersetze[g,$9] → $g_1(x) := -\frac{3}{5}\ x^2 + 6\ x - 9$
12	P:=(xp,f_1(xp)) → $P := \left(3, \frac{18}{5}\right)$

Gegeben: Polynom f(x,y)

Gesucht: Stationäre Stellen (Extrema)

CAS

1	f(x,y):=x^2+a x^2 y -y^3+y → $f(x,y) := -y^3 + x^2\ y + x^2 + y$
2	f_x(x,y):=Ableitung[f, x] → $f_x(x,y) := 2\ x\ y + 2\ x$
3	f_y(x,y):=Ableitung[f, y] → $f_y(x,y) := x^2 - 3\ y^2 + 1$
4	c_x:=ImpliziteKurve[f_x] → $c_x := 2xy + 2x = 0$
5	c_y:=ImpliziteKurve[f_y] → $c_y := x^2 - 3y^2 = -1$
6	Liste1:=Löse[{f_x, f_y},{x, y}] PunktListe: $Liste1 := \left\{\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(0, -\right.\right.$

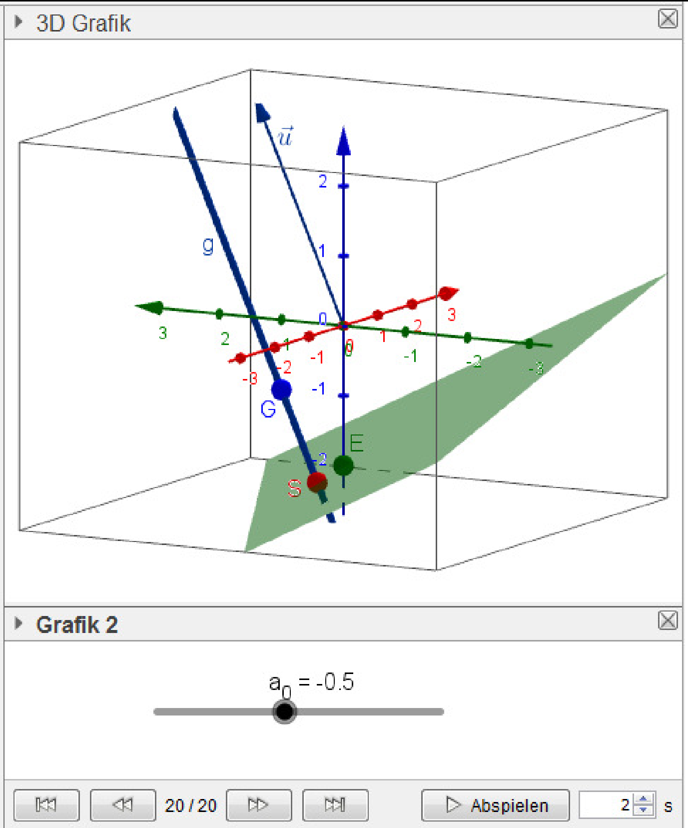


Siehe: CAS-NichtlinearesGLS.ggb

Gegeben: Gerade g und Ebenenschar e_a **Gesucht:** Schnittpunkt in Abhängigkeit von a

CAS

1	G := (0, 1, -1) $\rightarrow \mathbf{G := (0, 1, -1)}$
2	u := (1, 2, 3) $\rightarrow \mathbf{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
3	g: X = G + λ u $\rightarrow \mathbf{g : X = (\lambda, 2\lambda + 1, 3\lambda - 1)}$
4	Ebenenschar mit Parameter a
5	n:=(a^2, a, -1) $\rightarrow \mathbf{n} := \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$
6	e: n*(x,y,z)=2 $\rightarrow \mathbf{e : a^2 x + a y - z = 2}$



Siehe: CAS-Ebenenschar.ggb Klicke dich mittels der Navigationsleiste durch die CAS-Berechnung

Die Gerade g kann direkt in Punkt-Richtungsform **X = G + λ*u** mit Parameter λ eingegeben werden. Nach Eingabe des Normalenvektors n mit dem Parameter a erhält man die Koordinatengleichung der Ebenenschar direkt als **n*(x,y,z)=2** . Abhängig vom Schieberegler für a_0 erhält man die Ebene e_0 mit **Ersetze[e, a=a_0]**.
Für den Schnittpunkt muss „g in e" eingesetzt werden. **Ersetze[e,{x=λ, y=2λ+1, z=3λ-1}]** ist fix, mit **rg:=RechteSeite[g]** übernimmt **Ersetze[e,{x=x(rg), y=y(rg), z=z(rg)}** Änderungen z.B. von G dynamisch. **Löse[$11, λ]** löst die Gleichung nach λ auf, kürzt aber das Ergebnis mit dem Faktor (a-1) -> Fehlerquelle! **Löse[$11,a]** zeigt, dass a=1 eine Lösung ist und dann g in e liegt.
Ersetze[g,$12] und **S:=RechteSeite[Ersetze[$14,a = a_0]]** liefern den Schnittpunkt S=g ∩ e_0.
Zeilen 16-20 liefern E=(0,0,-2)∈ e , was mit **Ersetze[e, {x=x(E), y=y(E), z=z(E)]** verifiziert wird.

CAS

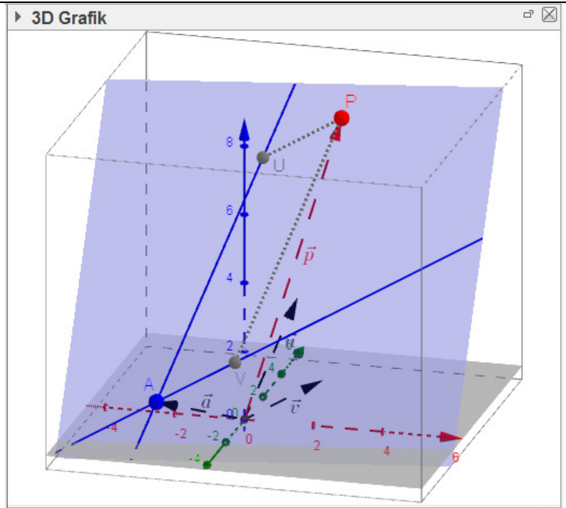
7	e_0: Ersetze[e, a=a_0] $\rightarrow \mathbf{e_0 : \frac{1}{4} x - \frac{1}{2} y - z = 2}$
8	Schnittpunkt der Gerade g mit Ebene e
9	Ersetze[e, {x=λ , y= 2λ+1 , z=3λ-1}] ist nicht dynamisch
10	rg:=RechteSeite[g] $\rightarrow \mathbf{rg} := \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda + 1 \\ 3\lambda - 1 \end{pmatrix}$
11	Ersetze[e,{x=x(rg), y=y(rg), z=z(rg)}] $\rightarrow \mathbf{a^2 \lambda + a (2\lambda + 1) - 3\lambda + 1 = 2}$
12	Löse[$11,λ] $\rightarrow \left\{\lambda = -\frac{1}{a+3}\right\}$
13	Achtung: Für a=1 liegt g in e_0, siehe Löse[$11,a]
14	Ersetze[g,$12] $\rightarrow \mathbf{X = \left(-\frac{1}{a+3}, -\frac{2}{a+3} + 1, -\frac{3}{a+3} - 1\right)}$
15	S:=RechteSeite[Ersetze[$14,a = a_0]] $\rightarrow \mathbf{S := \left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{11}{5}\right)}$
16	Alle Ebenen der Schar enthalten einen Punkt E
17	Bedingung: e und Ableitung[e,a] erfüllt für alle a
18	Ableitung[e,a] $\rightarrow \mathbf{2 a x + y = 0}$
19	E:=(0,0,-2)

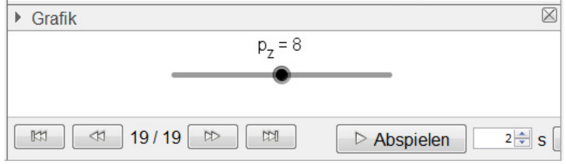
CAS-Teil von Ebene-PR-Form.ggb

Gegeben: Vektoren a,u,v,p **Frage:** Liegt P in der von u und v aufgespannten Ebene mit Aufpunkt A

CAS

1	a:=Vektor[(-2,-2,1)] $\rightarrow \mathbf{a} := \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
2	einfacher
3	u := (1, 2, 3) $\rightarrow \mathbf{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
4	v := (2, 1, 1) $\rightarrow \mathbf{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
5	Punkt-Richtungsform der Ebene d mit Aufpunkt A
6	dd:=a+λ u+μ v $\rightarrow \mathbf{dd} := \begin{pmatrix} \lambda + 2\,\mu - 2 \\ 2\,\lambda + \mu - 2 \\ 3\,\lambda + \mu + 1 \end{pmatrix}$
7	p:=(2,3,p_z) $\rightarrow \mathbf{p} := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$
8	Liegt Punkt P in Ebene d
9	Löse[dd= p,{λ, μ}] $\rightarrow \{\{\lambda = 2, \mu = 1\}\}$





Siehe File: Ebene-PR-Form.ggb
Klicke dich mittels der Navigationsleiste durch die Konstruktion/Berechnung.
Für p_z ≠ 8 liefert Zeile 9 die leere Menge und die Berechnung bricht ab.

10	up:=Ersetze[dd,{Element[Element[$9,1],1], μ = 0}] $\rightarrow \mathbf{up} := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$
11	vp:=Ersetze[dd,{λ = 0, Element[Element[$9,1],2]}] $\rightarrow \mathbf{vp} := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Nach Eingabe der Vektoren a, u und v und der Punkt-Richtungsform der Ebene im CAS-Teil von GeoGebra kann die Ebene d im 3D-Garfik-Fenster geometrisch definiert werden, vgl. Schritte 7-10:

Konstruktionsprotokoll - 3D-Ebene-PR-Form.ggb

Nr.	Name	Befehl	Wert
7	Punkt A	a	A = (-2, -2, 1)
8	Gerade b	Gerade[(x(A), y(A), z(A)), Vektor[(x(u), y(u), z(u))]]	b: X = (-2, -2, 1) + λ (1, 2, 3)
9	Gerade c	Gerade[(x(A), y(A), z(A)), Vektor[(x(v), y(v), z(v))]]	c: X = (-2, -2, 1) + λ (2, 1, 1)
10	Ebene d	Ebene[b, c]	d: -0.11x + 0.55y - 0.33z = -1.2
11	Zahl p_z		p_z = 8
12	Vektor p	(2, 3, p_z)	p = (2, 3, 8)
13	Punkt P	p	P = (2, 3, 8)

Der Schieberegler für p_z muss (derzeit) in einem separatem 2D-Grafik-Fenster eingegeben werden. **Beachte:** In der aktuellen Version erhält man die **Ebene d in Parameterform** als **dd :=a + λ u + μ v**. Zur Ausgabe von d im 3D-Fenster wurde die Verbindungsebene der Geraden b und c eingetragen. Das Gleichungssystem a + λ u + μ v = p löst man mit dem Befehl **Löse[dd = p, {λ , μ}]** . Um den Vektor up für den Punkt U auf b zu erhalten, setzt man in dd für λ das Ergebnis aus $9 und μ = 0 ein. $9 ist als Liste {…} einer Liste {…} mit zwei Einträgen ausgegeben. Den Eintrag **λ = 2** erhält man (dynamisch) als **Element[Element[$9,1],1]**. Entsprechendes gilt für V. **Problem: richtiges Format ?** **Element[$9,1]** liefert die Liste **{λ = 2, μ = 1}**.