Geometrie LB Flächentheorie Zusammenfassung

Notiztitel 18.01.2021

Parametrisierte C^r-Fläche im $\mathbb{R}^3$ $(r \geq 1)$

$$\Phi : \begin{cases} G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) \mapsto \vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \end{cases}$$

u, v .. Parameter

G .. Parametergebiet (z.B. Rechteck in uv-Ebene)

Parameterdarst. (PD)

Differentiationsordnung r, wenn $\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}(u,v)$ r mal stetig d.b. partiell nach u und v

Parameterlinien

u-Linien mit $v = v_0 = \text{const.}$: $\vec{x}(u, v_0)$ mit Tgtvektor $\vec{x}_u(u, v_0)$

v-Linien mit $u = u_0 = \text{const}$: $\vec{x}(u_0, v)$ mit Tgtvektor $\vec{x}_v(u_0, v)$

(u_0, v_0) reguläre Param.stelle $\Leftrightarrow$ $\vec{x}_u(u_0,v_0), \vec{x}_v(u_0,v_0)$ l.u.

$\Leftrightarrow (\vec{x}_u \times \vec{x}_v)\big|_{(u_0,v_0)} \neq \vec{0}$ Richtung der Flächennormale senkrecht zur Tangentenebene von Φ in $\vec{x}(u_0, v_0)$

Nachweis i.a. nicht einfach!

$\vec{x}(u_0,v_0)$ .. einfacher Pkt $\Leftrightarrow \forall (u,v) \in G \setminus \{(u_0,v_0)\}$ gilt $\vec{x}(u,v) \neq \vec{x}(u_0,v_0)$

bzw. Aus $\vec{x}(u,v) = \vec{x}(u_0,v_0)$ folgt $(u,v) = (u_0,v_0)$.

Pkte $\vec{x}(u_0,v_0) = \vec{x}(u_1,v_1)$ mit $(u_0,v_0) \neq (u_1,v_1)$ .. Doppelpkte

Flächenkurve von Φ

$c_0: \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \subset G \subset \mathbb{R}^2$, $t \in I$ liefert $c: \vec{y}(t) := \vec{x}(u(t), v(t))$ auf Φ

mit Tgtvektor $\underbrace{\dot{\vec{y}}(t) = \vec{x}_u(u(t),v(t)) \cdot \dot{u}(t) + \vec{x}_v(u(t),v(t)) \cdot \dot{v}(t)}_{\text{Kettenregel}}$ als LK von $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ im Tgt VR

Auf regulären Flächen Φ gilt: c ist regulär $\Leftrightarrow (\dot{u}, \dot{v}) \neq (0,0)$ $\forall t$

Bogenlänge von c: $s = \int |\dot{\vec{y}}| \, dt = \int \sqrt{\underbrace{\vec{x}_u^{\,2}}_{=:g_{11}} \dot{u}^2 + 2 \underbrace{\vec{x}_u \cdot \vec{x}_v}_{=:g_{12}=g_{21}} \dot{u}\dot{v} + \underbrace{\vec{x}_v^{\,2}}_{=:g_{22}} \dot{v}^2} \, dt$

metrische Fundamentalgrößen: $=: g_{11}$, $=: g_{12} = g_{21}$, $=: g_{22}$

LAGRANGE-Id $\Rightarrow (\vec{x}_u \times \vec{x}_v)^2 = \vec{x}_u^{\,2} \vec{x}_v^{\,2} - (\vec{x}_u \cdot \vec{x}_v)^2 = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} =: g$

$\Rightarrow \vec{n}_e(u,v) = \frac{1}{\sqrt{g}} (\vec{x}_u \times \vec{x}_v)$ Normaleneinheitsvektor.

Winkel der Param.linien: $\cos\varphi = \frac{\vec{x}_u \cdot \vec{x}_v}{|\vec{x}_u||\vec{x}_v|} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}$

Winkel zweier Flächenkurven $\vec{y}(t) = \vec{x}(u(t), v(t))$, $\vec{\bar{y}}(\bar{t}) = \vec{x}(\bar{u}(\bar{t}), \bar{v}(\bar{t}))$

im gem. Schnittpkt $\vec{y}(t_0) = \vec{\bar{y}}(\bar{t}_0)$: $\cos\varphi = \frac{\dot{\vec{y}}(t_0)\cdot\dot{\vec{\bar{y}}}(\bar{t}_0)}{|\dot{\vec{y}}(t_0)||\dot{\vec{\bar{y}}}(\bar{t}_0)|} =$ mit Kettenregel "$\circ$"

$= \frac{g_{11}\dot{u}\dot{\bar{u}} + g_{12}(\dot{u}\dot{\bar{v}} + \dot{v}\dot{\bar{u}}) + g_{22}\dot{v}\dot{\bar{v}}}{\sqrt{(g_{11}\dot{u}^2 + 2g_{12}\dot{u}\dot{v} + g_{22}\dot{v}^2)(g_{11}\dot{\bar{u}}^2 + 2g_{12}\dot{\bar{u}}\dot{\bar{v}} + g_{22}\dot{\bar{v}}^2)}}$ Abl. von u, v nach t, Abl. von $\bar{u}, \bar{v}$ nach $\bar{t}$

Oberfläche eines regulären Flächenstücks $\Psi \subset \Phi$, $\vec{x}(u,v)$

zum Parametergebiet $D \subset G \subset \mathbb{R}^2$: $O = \iint_D \sqrt{g}\, du\, dv$,

zum Rechtecksbereich $[u_1, u_2] \times [v_1, v_2] \subset G$: $O = \int_{v_1}^{v_2} \left(\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{g}\, du \right) dv$

Parametertransformation (PT) einer regulären Fläche Φ

bijektive C^r-Abbildung: $f: \begin{array}{l} \bar{G} \subset \mathbb{R}^2 \to G \subset \mathbb{R}^2 \\ (\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (u,v) = (u(\bar{u},\bar{v}), v(\bar{u},\bar{v})) \end{array}$

liefert neue PD von Φ: $\vec{y}(\bar{u},\bar{v}) = \vec{x}(u(\bar{u},\bar{v}), v(\bar{u},\bar{v}))$ mit

$\vec{y}_{\bar{u}} \times \vec{y}_{\bar{v}} = \underbrace{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}_{\neq \vec{0}} \cdot \det\begin{pmatrix} u_{\bar{u}} & u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{u}} & v_{\bar{v}} \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, falls $\det(\ldots) \neq 0$ $\Leftrightarrow$ PT zulässig

Nützlich zur Berechnung von Oberfläche

bijektive Flächenabbildung $\alpha: \Phi \to \Phi^*$

Satz Durch eine PT lassen sich beide Flächen auf gleiche Parameter $(u,v) \in G$ beziehen $\begin{array}{l}\Phi: \vec{x}(u,v) \\ \Phi^*: \vec{x}^*(u,v)\end{array}$ mit $\alpha(\vec{x}(u,v)) = \vec{x}^*(u,v)$

Dann gilt:

① α längentreu $\Leftrightarrow$ $g^*_{ij}(u,v) = g_{ij}(u,v)$ $\forall (u,v) \in G$ (isometrisch)

(d.h. entspr. Kurven auf Φ und Φ^* haben gleiche Länge)

② α winkeltreu $\Leftrightarrow$ $g^*_{ij}(u,v) = \underbrace{\lambda(u,v)}_{>0} g_{ij}(u,v)$ $\forall (u,v) \in G$ (konform)

(d.h. entspr. Kurvenpaare auf Φ und Φ^* haben gleiche Schnittwinkel)

③ α flächentreu $\Leftrightarrow$ $g^*(u,v) = g(u,v)$ $\forall (u,v) \in G$

(d.h. entspr. Flächenstücke auf Φ und Φ^* haben gleiche Flächeninhalte)