Geometrie LB Übungen Blatt 2

Notiztitel 13.10.2014

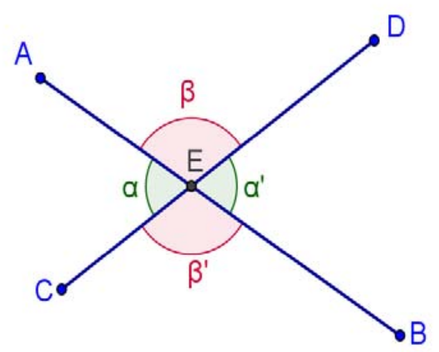
T4. Nach Angabe gilt:

(1) Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, Winkel bildet, dann muss sie entweder zwei Rechte oder solche, die zusammen zwei Rechten gleich sind, bilden.

Zu zeigen:

(2) Zwei gerade Linien bilden, wenn sie einander schneiden, Scheitelwinkel, die einander gleich sind.

$E = AB \cap CD$ Schnittpunkt der Geraden/Strecken AB und CD



AE trifft CD in E $\Rightarrow$

$\alpha+\beta=$ 2 Rechte Winkel nach (1)

DE trifft AB in E $\Rightarrow$

$\beta+\alpha'=$ 2 Rechte Winkel nach (1)

$\Rightarrow \alpha+\beta=\beta+\alpha'$

Nimmt man β auf beiden Seiten weg,

folgt $\alpha=\alpha'$

Analog: $\beta=\beta'$ $\Big\}$ d.h. (2)

T5 <u>Inzidenzraum/Affine Ebene</u> (Punkte $A, B, C, \ldots$ und Geraden $a, b, c, \ldots$)

Es seien $\mathcal{P}$ eine Menge, deren Elemente wir Punkte, und $\mathcal{G}$ eine Teilmenge der Potenzmenge von $\mathcal{P}$, deren Elemente wir Geraden nennen. Das Paar $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ heißt <u>Inzidenzraum</u>, wenn folgende <u>Axiome</u> gelten:

I1 Zu $X, Y \in \mathcal{P}$ mit $X \neq Y$ gibt es genau ein $g \in \mathcal{G}$ mit $X, Y \in g$

I2 Für alle $g \in \mathcal{G}$ gilt $|g| \geq 2$ (i.W. g enthält mind. 2 Punkte)

Ein Inzidenzraum $(E, \mathcal{G})$ heißt <u>affine Ebene</u>, wenn gilt:

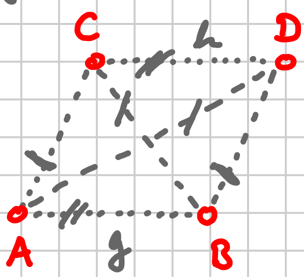
E1 Es gibt drei nicht-kollineare Punkte

E2 (<u>Parallelenaxiom</u>) Zu jedem Paar $(X, g) \in E \times \mathcal{G}$ mit $X \notin g$ gibt es genau ein $h \in \mathcal{G}$ mit $X \in h$ <u>und</u> $g \cap h = \emptyset$

leere Menge

Kleinste affine Ebene ?

nur gedachte Verb.linien



Eine affine Ebene enthält mindestens 4 Punkte: 3 Punkte $\{A, B, C\}$ wegen E1 und einen 4-ten Punkt D wegen E2 und I2

Beg. Zur Verbindungsgerade $g = AB$ (vgl. I1) existiert durch C genau eine parallele Gerade h mit $h \cap g = \emptyset$ (vgl. E2), die mindestens einen Punkt $D \neq C$ (vgl. I2) mit $D \notin \{A, B\}$ enthält

$\Rightarrow E = \{A, B, C, D\}$, $\mathcal{G} = \{\{A,B\},\{A,C\},\{A,D\},\{B,C\},\{B,D\},\{C,D\}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$

Punktmenge — Menge der Geraden — Geraden — Potenzmenge von E (Menge aller Teilmengen)

$|E| = 4$ Punkte, $g \in \mathcal{G} \Rightarrow |g| = 2$ Punkte, $|\mathcal{G}| = 6$ Geraden

Beachte: A, B, C nicht kollinear $\Rightarrow C \notin g = AB$ und $D \notin g$, da sonst $h \cap g = D \neq \emptyset$ ↯ $\Rightarrow$ hier gilt $2 = |g| < 3$ $\Big\} \Rightarrow g = \{A, B\}$ Menge

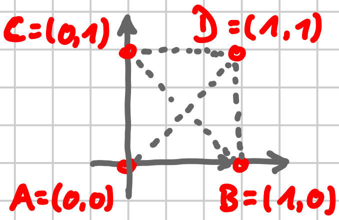
Es gilt weiter: $\{A,B\} \parallel \{C,D\}$, $\{A,C\} \parallel \{B,D\}$, $\{A,D\} \parallel \{B,C\}$ da jeweils die Schnittmengen leer sind.

Zusatz: Affine Koordinatenebene über $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

Rechnen modulo 2

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1



Punktmenge $E = \{A, B, C, D\}$

Richtungen $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$

$A + (1,0) = (1,0) = B$, $B + (1,0) = (0,0) = A \Rightarrow$ Gerade $\{A,B\}$

$C + (1,0) = (1,1) = D$, $D + (1,0) = (0,1) = C \Rightarrow$ Gerade $\{C,D\}$

$A + (0,1) = (0,1) = C$, $C + (0,1) = (0,0) = A \Rightarrow$ Gerade $\{A,C\}$

$B + (0,1) = (1,1) = D$, $D + (0,1) = (1,0) = B \Rightarrow$ Gerade $\{B,D\}$

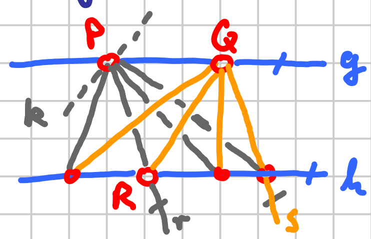
$A + (1,1) = (1,1) = D$, $D + (1,1) = (0,0) = A \Rightarrow$ Gerade $\{A,D\}$

$B + (1,1) = (0,1) = C$, $C + (1,1) = (1,0) = B \Rightarrow$ Gerade $\{B,C\}$

$\Rightarrow$ Geraden $\mathcal{G} = \{\{AB\},\{AC\},\{AD\},\{BC\},\{BD\},\{C,D\}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$

T6 **gegeben:** Affine Ebene $(E, \mathcal{G})$ mit endlich vielen Punkten $|E| = n \Rightarrow$ Jede Gerade enthält endlich viele Punkte und durch jeden Punkt gehen nur endlich viele Geraden.

(1) Seien P und Q zwei verschiedene Punkte $P \neq Q$, dann gibt es nach I 1 genau eine Verbindungsgerade $g = PQ$, nach E1 mindestens einen Punkt R, der nicht auf g liegt und nach E2 gibt es zu g durch R genau eine parallele Gerade h mit $g \cap h = \emptyset$.



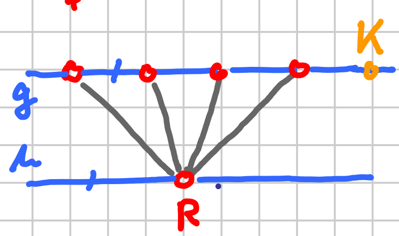
Enthält h genau q Punkte, so gehen durch P und durch Q mindestens $q+1$ Geraden (die q Verbindungsgeraden von P bzw Q mit den q Punkten von h und die Gerade g, die wegen $g \cap h = \emptyset$ die eindeutige Parallele zu h durch P und Q ist.)

Annahme: Durch P oder Q geht eine weitere Gerade k, so ist $k \nparallel h$ (vgl. E2), schneidet also h in einem weiteren Punkt ↯

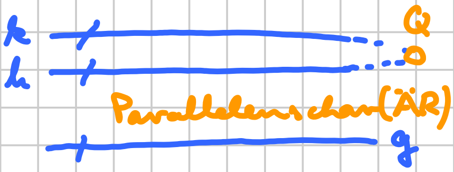
$\Rightarrow$ Durch P und Q gehen gleichviele $(q+1)$ Geraden, analog durch P und R gleichviele $(q+1!)$ (Betrachte statt dem Paar (P, Q) das Paar (P, R) und die Parallele s zu $r = PR$ durch Q) $\Rightarrow$ Durch alle Punkte gehen genau $q+1$ Punkte

(2) Wir zeigen: Alle Geraden enthalten q Punkt

Sei g eine Gerade, dann gibt es nach E1 mindestens einen Punkt R, der nicht auf g liegt. Durch R gibt es nach (1) genau $q+1$ Geraden, wovon nach E2 genau eine parallel zu g liegt mit $g \cap h = \emptyset$. Die übrigen q Geraden schneiden g jeweils in genau einem Punkt $\Rightarrow$ g enthält mind. q Punkte



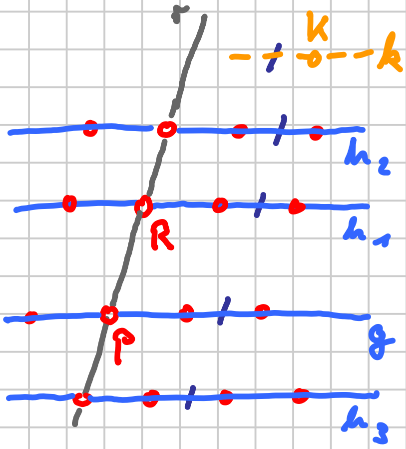
Annahme: g enthält einen weiteren Punkt K, so gäbe es eine weitere Gerade durch R ↯ $\Rightarrow$ Behauptung



(3) Offenbar gilt: $h \parallel g \overset{\text{symmetrisch}}{\Leftrightarrow} g \parallel h$ und es gilt:

$h \parallel g$ und $g \parallel k \underset{\text{transitiv}}{\Rightarrow} h \parallel k$. Man setzt $g \parallel g$. reflexiv

<u>Annahme:</u> $h \cap k = Q \Rightarrow h$ und k sind <u>zwei</u> Parallele zu g durch Q ↯ zu E2



Sei g eine Gerade, $P \in g$ und $R \notin g$ (vgl. oben bzw I2, E1). Dann liegen auf der Verbindungsgeraden $r = PR$ nach (2) genau q Punkte. Nach E2 gibt es dann durch jeden der $q-1$ Punkte $\neq P$ genau eine Parallele zu g, also mit g mindestens q zueinander parallele Geraden.

<u>Annahme:</u> Es gäbe eine weitere Parallele k zu g: $k \parallel g$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{Entweder: } k \cap r \text{ ist ein weiterer Punkt von } r \text{ ↯ Voraus.} \\ \text{oder: } k \parallel r \text{, dann sind } g \text{ und } r \text{ zwei Parallelen zu } k \text{ durch } P \text{ ↯ zu E2} \end{cases}$

⇒ Zu jeder Geraden g gibt es genau q zueinander parallele Geraden.

(4) $|E| = ?$ Abzählen in Figur zu (3):

q parallele Geraden mit je q Punkten $\Rightarrow |E| \geq q^2$

<u>Annahme:</u> Es gäbe einen weiteren Punkt K, so gäbe es nach E2 eine weitere Parallele zu g durch K ↯ zu (3) $\Rightarrow |E| = q^2$

(5) $|\mathcal{G}| = ?$ Abzählen Durch jeden der q Punkte einer Geraden g gehen $q+1$ Geraden wobei g nur <u>einmal</u> mitgezählt und die zu g parallelen Geraden $\neq g$ nicht vergessen werden dürfen

$\Rightarrow |\mathcal{G}| \geq q \cdot (q+1) - \underbrace{(q-1)}_{g \text{ zu oft}} + \underbrace{(q-1)}_{\text{Parallelen zu } g} = q^2 + q$

<u>Annahme:</u> Es gäbe eine weitere Gerade k, so müsste diese g in einem weiteren Punkt schneiden ↯ zu (2) oder eine weitere Parallele zu g sein ↯ zu (3) $\Rightarrow |\mathcal{G}| = q^2 + q$

(4) <u>Alternativ</u>: Betrachte die $q+1$ Geraden durch einen Punkt P mit ihren jeweils q Punkten, wobei P nur einmal gezählt werden darf $\Rightarrow |E| = (q+1)\cdot q - q = q^2$, da ein weiterer Punkt eine weitere Gerade durch P zur Folge hätte ↯

(5) <u>Alternativ</u>: Es gibt $\binom{q^2}{2}$ Möglichkeiten durch 2 Punkte eine Gerade zu legen, wobei es $\binom{q}{2}$ Möglichkeiten gibt eine bestimmte Gerade durch 2 ihrer q Punkte festzulegen.

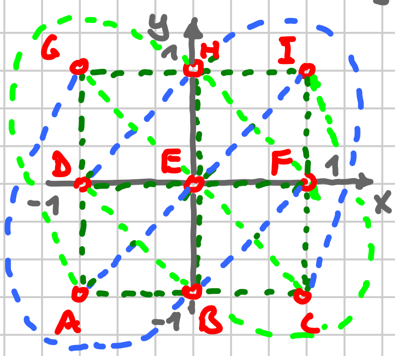
$$\Rightarrow |\mathcal{G}| = \binom{q^2}{2} \Big/ \binom{q}{2} = \frac{q^2(q^2-1)}{q(q-1)} = q(q+1) = q^2+q$$

<u>Beispiel</u>: Affine Koordinatenebene über $\mathbb{Z}_3 = \{-1,0,1\}$, $\underline{q=3}$

Rechnen modulo 3

$+$	-1	0	1
-1	1	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	-1

$\cdot$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1



3 horizontal

3 vertikal

3 $\parallel (1,1)$

3 $\parallel (1,-1)$

$E = \mathbb{Z}_3^2 = \{A=(-1,-1),\ B=(0,-1),\ C=(1,-1),\ D=(-1,0),\ E=(0,0),$

$F=(1,0),\ G=(-1,1),\ H=(0,1),\ I=(1,1)\} \Rightarrow |E| = 3^2 = 9$

Richtungen $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1) \parallel (-1,-1)$, $(1,-1) \parallel (-1,1)$

$A+(1,0) = (0,-1) = B$, $B+(1,0) = (1,-1) = C$, $C+(1,0) = (-1,-1) = A$

$\Rightarrow$ Gerade $\{A,B,C\}$ analog Geraden $\{D,E,F\}$ und $\{G,H,I\}$

$A+(0,1) = (-1,0) = D$, $D+(0,1) = (-1,1) = G$, $G+(0,1) = (-1,-1) = A$

$\Rightarrow$ Gerade $\{A,D,G\}$ analog Geraden $\{B,E,H\}$ und $\{C,F,I\}$

$A+(1,1) = (0,0) = E$, $E+(1,1) = (1,1) = I$, $I+(1,1) = (-1,-1) = A$

$\Rightarrow$ Gerade $\{A,E,I\}$ analog Geraden $\{B,F,G\}$ und $\{C,D,H\}$

$A+(1,-1) = (0,1) = H$, $H+(1,-1) = (1,0) = F$, $F+(1,-1) = (-1,-1) = A$

$\Rightarrow$ Gerade $\{A,H,F\}$ analog Geraden $\{B,D,I\}$ und $\{C,E,G\}$

$\Rightarrow \mathcal{G} = \{\{A,B,C\},\{D,E,F\},\{G,H,I\},\{A,D,G\},\{B,E,H\},\{C,F,I\},$

$\{A,E,I\},\{B,F,G\},\{C,D,H\},\{A,H,F\},\{B,D,I\},\{C,E,G\}\} \Rightarrow |\mathcal{G}| = 3\cdot 4 = 12$