Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. J. Hartl, Dr. H. Vogel

WS 2012/13
Blatt 13

Geometrie für das Lehramt an beruflichen Schulen

Klausur am 13. Februar 2013

Arbeitszeit 90 Minuten

Aufgabe 1 (ca. 4 Punkte)

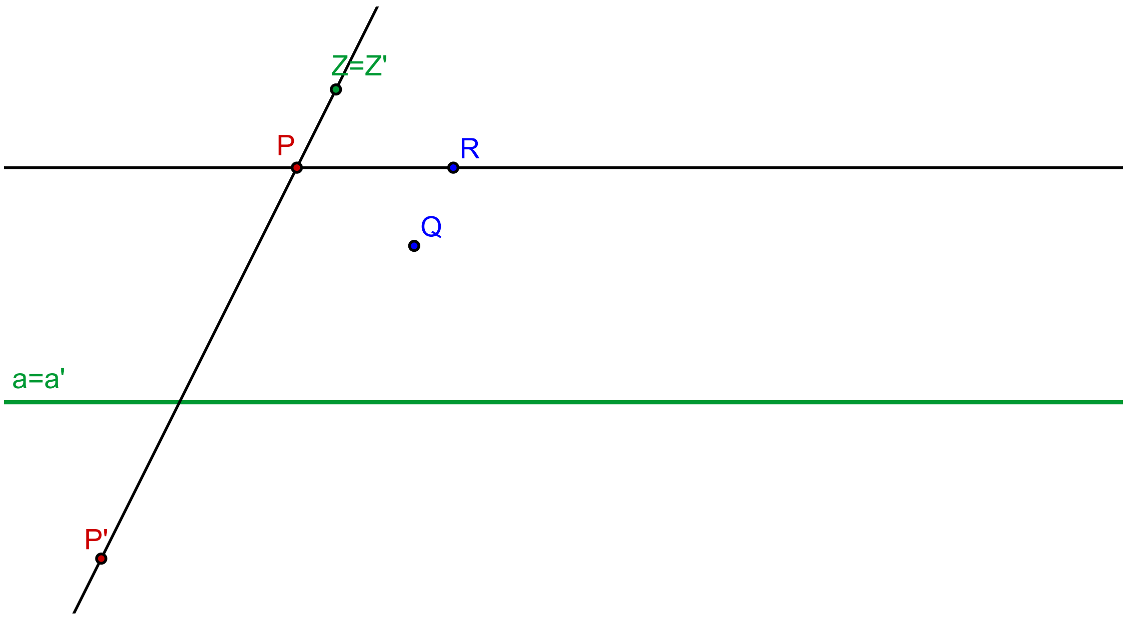
In der euklidischen Ebene gilt:

Ein Punkt P liegt genau dann auf einer Winkelhalbierenden w zweier einander schneidender Geraden g und h, wenn die Abstände $d(P, g), d(P, h)$ von P zu den Geraden g und h gleich sind. in Zeichen: $P \in w \;\Leftrightarrow\; d(P, g) = d(P, h)$

Beweisen Sie mit Hilfe dieser bereits bewiesenen Aussage, dass die Innenwinkelhalbierenden eines (nicht entarteten) Dreiecks einander in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 2 (ca. 6 Punkte)

In der projektiv abgeschlossenen euklidischen Ebene $\mathbf{P}^2$ sei eine ebene Kollineation $\varphi : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ gegeben durch Vorgabe eines Fixpunktes Z, einer Fixpunktgeraden a und eines Punktepaars (P, P'), $P' = \varphi(P) \neq P$.
Ferner seien gegeben die Punkte Q und R mit $PR \parallel a$, vgl. Angabe.



Konstruieren Sie

a) die Bilder g', Q' der Geraden $g = PQ$ und des Punktes Q,

b) das Bild R' des Punktes R,

c) den Punkt F der Geraden $g = PQ$, der auf einen Fernpunkt abgebildet wird,

d) den Ort f aller Punkte, die auf Fernpunkte abgebildet werden.

Hinweis: Es genügt die Konstruktion der gesuchten Objekte,
eine ausführliche Konstruktionsbeschreibung ist **nicht** erforderlich!

Aufgabe 3 (ca. 5 Punkte)

In der projektiv erweiterten euklidischen Ebene $\mathbf{P}^2$ gilt:

Sind g, h zwei Geraden, $Z \in \mathbf{P}^2 \backslash (g \cup h)$ und $A_1, A_2, A_3, A_4 \in g$ vier verschiedene Punkte der Geraden g. Dann gilt mit $B_i := A_i Z \cap h, (i = 1, .., 4) : DV(B_1, B_2, B_3, B_4) = DV(A_1, A_2, A_3, A_4)$

a) Skizzieren Sie diesen Sachverhalt.

b) Dualisieren Sie diese Aussage und skizzieren Sie die dualisierte Aussage.

Aufgabe 4 (ca. 6 Punkte)

In der projektiven Ebene $\mathbf{P}^2$ seien die Gerade $g:\ 5x_1 - x_2 = 0$ und der Kegelschnitt

$k:\ \vec{x}^T A \vec{x} = 0$ mit $A = A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ in homogenen Koordinaten gegeben.

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte Q_1, Q_2 von g und k.

b) Zeigen Sie, dass $t_1:\ 4x_0 - 3x_1 - x_2 = 0$ und $t_2:\ 4x_0 + 3x_1 + x_2 = 0$ die Gleichungen der Tangenten an k in den Punkten $Q_{1,2}$ sind.

c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt $P = t_1 \cap t_2$ der beiden Tangenten aus Aufgabe b).

d) Wie liegt die Polare p von P bezüglich des Kegelschnitts k zur Geraden g?

Aufgabe 5 (ca. 10 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sei eine $C^\infty-$Kurve c gegeben durch die Parameterdarstellung:

$$c:\ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \cos t \\ t^2 \sin t \\ 2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass c regulär und einfach ist.

b) Berechnen Sie die Länge s des Kurvenbogens von $O = (0,0,0)$ bis zum Schnittpunkt von c mit der Ebene $z = 6$.

c) Geben Sie den Mittelpunkt $\vec{m}(0)$ des Krümmungskreises von c im Punkt $\vec{x}(0)$ an.

Aufgabe 6 (ca. 9 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sei eine $C^\infty-$Fläche Φ gegeben durch die Parameterdarstellung:

$$\Phi:\ \vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} 2u \cos v \\ 2u \sin v \\ u^2 + v \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass $g = 4\,(2u^2 + 1)^2$ die Determinante der metrischen Fundamentalgrößen von Φ ist.

b) Zeigen Sie, dass der Winkel γ zwischen den Parameterlinien von Φ längs der $v-$Linien konstant ist.

c) Bestimmen Sie die Oberfläche O des Flächenstücks von Φ über dem Parametergebiet $G = [0,1] \times [0,\pi]$.